

КИЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О.А. Єщенко, О.В. Слободянюк

КВАНТОВА ОПТИКА

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О.А. Єщенко, О.В. Слободянюк

КВАНТОВА ОПТИКА

Навчальний посібник
для студентів фізичного факультету

УДК 535

Рецензенти:
д-р. фіз.-мат. наук, проф. О х р і м е н к о Б. А.
к-т. фіз.-мат. наук, доц. В е р л а н Е. М.

Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету (протокол №8 від 26 квітня 2004 року)

О.А. Єщенко, О.В. Слободянюк
Квантова оптика: Навчальний посібник для студентів фізичного факультету. – К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет", 2004.– 124 с.

Посібник «Квантова оптика» адресовано в першу чергу студентам старших курсів фізичного факультету і аспірантам, що спеціалізуються з фотоніки, оптики, лазерної фізики та фізичних основ лазерної та оптоелектронної техніки. За характером своєї діяльності це переважно експериментатори. Простота аналізу і класифікації процесів взаємодії електромагнітного поля з речовиною в термінах послідовно квантового підходу є дуже привабливими для експериментаторів. Саме з таких позицій написано цей посібник. Для досягнення цієї мети в посібнику наведено приклади застосування розглянутих теоретичних підходів до аналізу конкретних явищ, частина яких уже була розглянута в процесі їх навчання (іноді і неодноразово) з класичних та напівкласичних позицій, а інша частина ще навіть не відображена в навчальній літературі, а здебільшого лише в науковій періодиці та частково в малодоступних монографіях.

УДК 535

Автори висловлюють подяку студентам
спеціалізації „фотоніка" фізичного факультету
Галаку М., Фесюн О., Кубай М., Ковригіну С.
за технічну допомогу, надану при підготовці даного посібника.

© О.А. Єщенко, О.В. Слободянюк, 2004
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2004

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА..... 6

ВСТУП: Класичний, напівкласичний та квантовий підходи до розгляду електромагнітного поля та його взаємодії з речовиною.

Співвідношення невизначеностей для електромагнітного поля. Неможливість введення хвильової функції фотона в координатному представленні..... 7

РОЗДІЛ 1: Хвильова функція фотона.

Рівняння Максвела в просторі хвильових векторів. Хвильова функція фотона в імпульсному представленні. Хвильова функції фотона у випадку дискретного спектра. Фотон із визначеним імпульсом. Можливі стани поляризації фотона з визначеним імпульсом. Момент імпульсу фотона. Оператор моменту. Оператор орбітального моменту $\hat{\hat{L}}$. *Оператор спіну фотона* $\hat{\hat{S}}$. *Спіральність фотона. Стани фотона з визначеним моментом імпульсу. Парність станів фотона. Стани фотонів електричного та магнітного типів. Експериментальні прояви моменту імпульсу фотона*..... 11

РОЗДІЛ 2: Квантування вільного електромагнітного поля.

Розклад поля по плоских хвилях. Густина станів поля на інтервал частот. Перехід до канонічних змінних. Електромагнітне поле як сукупність осциляторів. Перехід до операторів. Властивості операторів народження та знищення. Вторинне квантування та представлення поля числами заповнення. Модель фотонного газу. Рівноважний фотонний газ. Формула Планка та закони випромінювання ... 29

РОЗДІЛ 3: Взаємодія фотонів з речовиною.

Поглинання та випромінювання фотонів атомом в електромагнітному полі. Гамільтоніан атома в представленні вторинного квантування. Гамільтоніан взаємодії атома з електромагнітним полем у представленні вторинного квантування. Чотири процеси переходів між двома рівнями в електромагнітному полі, їх діаграми та можливі реалізації. Вимушене та спонтанне випромінювання. Коефіцієнти Айнштайна. Комбінаційне розсвяння світла (КРС) з точки зору вторинного квантування. Спонтанне та вимушене КРС. Стоксове та антистоксове КРС..... 43

РОЗДІЛ. 4: Взаємодія фотонів з атомами. Експерименти.
Відхилення атомів світлом. Охолодження й полонення (захоплення) атомів світлом. Оптична меласа. Оцінка найменшої досяжної температури, заснована на балансі енергії..... 62
РОЗДІЛ 5: Квантові стани поля випромінювання.
Оператор числа частинок та оператор фази фотонів, їх не комутативність та неможливість одночасного точного вимірювання амплітуди та фази електромагнітної хвилі. Стани квантового поля випромінювання. Одномодові стани з точно визначеною фазою фотонів та з точно визначеною кількістю фотонів, порівняння їх властивостей (обчислення середніх значень та середньоквадратичних відхилень кількості частинок (амплітуди) та фази електромагнітного поля). Когерентні стани. Когерентні стани як лінійні суперпозиції власних станів оператора кількості частинок і як власні стани оператора знищення фотонів. Наближення властивостей електромагнітного поля в когерентному стані при великих числах заповнення до властивостей класичної плоскої електромагнітної хвилі. Стиснуті стани. Стиснуті стани з придушеними флуктуаціями кількості фотонів, фази та квадратурно стиснуті стани. Схема балансного гомодинного детектування. Генерація електромагнітного поля у стиснутих станах. Групування, антигрупування фотонів. Пуасонівські та субпуасонівські фотонні поля. Антигрупування фотонів при резонансній флуоресценції. Біфотони. Інтерференційні досліди з участю біфотонів..... 68
РОЗДІЛ 6: Чисті та змішані стани квантованого поля випромінювання. Оператор густини.
Поняття про чисті та змішані стани поля випромінювання. Приклади чистих та змішаних станів: стаціонарна класична плоска хвиля, хаотичний (гаусівський) світловий пучок та теплове збудження фотонів у моді порожнини. Уведення оператора густини, його властивості та обчислення середніх . Оператори густини для чистих станів електромагнітного поля. Оператор густини , що описує теплове збудження фотонів в одній моді порожнини: різні форми запису, обчислення середнього поля та середньої кількості фотонів. Оператор густини для теплового збудження всіх мод порожнини. Матриця густини для опису

поляризації фотона. Параметри Стокса..... 95
РОЗДІЛ 7: Фотодетектування. Лічба фотонів.
Розподіл фотовідліків у випадку когерентного та хаотичного світла. Вплив тривалості часу вимірювання на форму розподілу та величину середньоквадратичної похибки кількості підрахованих фотонів для хаотичного світла. Часова спектроскопія..... 109
ДОДАТОК: Осциляції Рабі. Резонансна флюоресценція..... 116
ЛІТЕРАТУРА..... 123

Пам'яті нашого вчителя
академіка Горбаня Івана Степановича
присвячується.

Передмова

Посібник «Квантова оптика» адресовано в першу чергу студентам старших курсів фізичного факультету і аспірантам, що спеціалізуються з фотоніки, оптики, лазерної фізики та фізичних основ лазерної та оптоелектронної техніки. За характером своєї діяльності це переважно експериментатори. Простота аналізу і класифікації процесів взаємодії електромагнітного поля з речовиною в термінах послідовно квантового підходу є для них дуже привабливими. Саме з таких позицій написано цей посібник: автори хотіли б дати експериментаторам інструмент для попереднього узагальненого коректного аналізу власних результатів і критичного ставлення до того, що пишуть інші; навчити їх мові, яка використовується в сучасній науковій літературі і яку вони зможуть використати в діалогах з теоретиками; глибше зрозуміти принципові обмеження точності оптичних вимірювань, і, нарешті, перекинути в свідомості студентів, що вивчають фотоніку та оптику, фізично обґрунтований місток через прірву між хвильовим і корпускулярним підходами, логічно замкнувши доступну їм фізичну картину взаємодії світла з речовиною. Для досягнення цієї мети в посібнику наведено приклади застосування розглянутих теоретичних підходів до аналізу конкретних явищ, частина яких уже була розглянута в процесі їх навчання (іноді і неодноразово) з класичних та напівкласичних позицій, а інша частина ще навіть не відображена в навчальній літературі, а здебільшого лише в науковій періодиці та частково в малодоступних монографіях.

Зазначимо, що в усіх розділах посібника використовується система одиниць СГСМ.

Автори передбачають можливу наявність недоліків та описок, які залишилися попри всі зусилля їх уникнути. Тому будь-які зауваження та пропозиції будуть вітатися авторами.

Автори

ВСТУП: Класичний, напівкласичний та квантовий підходи до розгляду електромагнітного поля та його взаємодії з речовиною

Існує три підходи до опису системи „електромагнітне поле + речовина": ***класичний, напівкласичний та квантовий.***

Класичний підхід вивчається в загальному курсі оптики та в теоретичному курсі класичної електродинаміки. Він є досить наочним і пояснює широке коло явищ, в основі яких лежить взаємодія електромагнітного поля з речовиною.

Напівкласичний підхід знаходить своє обґрунтування в теоретичному курсі квантової механіки і широко застосовується в загальному курсі атомної фізики та в різноманітних спецкурсах з спектроскопії атомів, молекул, кристалів, напівпровідників, квантової електроніки і нелінійної оптики, фотоніки тощо. Діапазон його застосування значно ширший: він дозволяє кількісно описати такі процеси, повноту опису яких класичний підхід забезпечити не здатний, а до деяких не може бути застосований в принципі. Напівкласичний підхід використовує апарат класичної квантової механіки, його застосування до планування та аналізу експериментів потребує солідної математичної підготовки і в ряді випадків він значно поступається наочністю класичному підходу.

Послідовно квантовий підхід дозволяє здійснити найбільш повний і адекватний опис як речовини, так і електромагнітного поля та їх взаємодії в рамках єдиного підходу. Хоча теоретичне обґрунтування цього підходу доволі складне, зокрема, в зв'язку з необхідністю застосування методів квантової електродинаміки, його застосування до аналізу ряду явищ, що супроводжують взаємодію світла з речовиною, крім пояснення і передбачення ефектів невідомих в рамках напівкласичного, а тим більше класичного підходу, дозволяє значно простіше пояснити і глибше зрозуміти фізику основних процесів взаємодії випромінювання з речовиною, які звичайно детально аналізуються в рамках університетської програми з фізики напівкласично.

Нагадаємо основні риси цих трьох підходів.

Класичний: електромагнітне поле представлено класичною електромагнітною хвилею, а речовина - набором класичних

гармонічних осциляторів, рух яких під дією змінного електричного поля електромагнітної хвилі описується рівняннями типу

$$\ddot{\vec{r}} + 2\beta\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} - e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} = 0\,. \qquad \text{(B.1)}$$

Такі суто механічні рівняння разом з рівняннями Максвела, що визначають електричне поле електромагнітної хвилі $\vec{E}$ дають можливість обчислити діелектричну проникність речовини, яка визначає особливості її взаємодії з електромагнітним полем.

Напівкласичний: речовина розглядається „квантово" – для неї записується відповідне рівняння Шредінгера:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 + \hat{V}(t)\right)\psi \quad , \qquad \text{(B.2)}$$

де $\hat{H}_0$ – гамільтоніан речовини, а $\hat{V}(t)$ – оператор збурення:

$$\hat{V}(t) = \sum_j -\frac{e_j}{2m_j}\left(e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} + e^{i(\iota\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)(\vec{E}_0\cdot\vec{r}), \qquad \text{(B.3)}$$

тобто електромагнітне поле знову розглядається класично. Така теорія дозволяє розрахувати, наприклад, інтенсивність вимушеного випромінювання квантової системи (атом, молекула, кристал).

Квантовий: і речовина, і електромагнітне поле розглядаються як квантові об'єкти, зокрема має місце квантування енергії поля $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$. В рамках цього підходу може бути послідовно розглянуто спонтанне випромінювання, передбачено лембівський зсув та інші явища.

Перехід до квантового опису мікрочастинок речовини ґрунтується на співвідношенні невизначеностей. При переході до квантового опису електромагнітного поля так само треба розглянути відповідні співвідношення невизначеностей.

<u>Співвідношення невизначеностей для електромагнітного поля</u>

Якщо оператори не комутують, то їх власні значення зв'язані співвідношенням невизначеностей. Наприклад, для власних значень некомутуючих операторів радіус-вектора та імпульсу:

$$\Delta r\cdot\Delta p \sim \hbar\,. \qquad \text{(B.4)}$$

З (В.4) отримаємо:

$$\Delta r \sim \hbar/\Delta p\,. \qquad \text{(В.5)}$$

Для довільної частинки:

$$\Delta r_{\min} \sim \frac{\hbar}{\Delta p_{\max}}\ , \qquad \text{(В.6)}$$

причому

$$p = \frac{E\text{v}}{c^2}\ , \quad E^2 - p^2c^2 = m^2c^4\,. \qquad \text{(В.7)}$$

Розглянемо варіанти:

1. Для масивної нерелятивістської частинки ($pc << mc^2$):

$$E \approx mc^2\,. \qquad \text{(В.8)}$$

Наприклад для електрона на першій борівській орбіті атома водню: $\text{v} \approx 0{,}01c$. Отже, з (В.7), враховуючи (В.7), маємо $p = \frac{mc^2}{c^2}\text{v} = 0{,}01mc$. Покладаючи $\Delta p_{\max} = p$, з (В.6) для мінімальної невизначеності координати електрона в атомі отримаємо:

$$\Delta r_{man} = \frac{\hbar}{0{,}01mc} \approx 0{,}4 \text{ Å}. \qquad \text{(В.9)}$$

Отже, невизначеність визначення координати електрона є порядку розмірів атома. Тому дещо „розмазаний” в межах атома електрон в принципі описується хвильовою функцією в координатному представленні.

2. Ультрарелятивістська масивна частинка та безмасовий фотон[1]: $pc >> mc^2$, а отже $E = pc$. У цьому випадку:

$$\Delta p_{\max} = \frac{\Delta E_{\max}}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k\,.$$

Тоді:

[1] Фотон – безмасова частинка. Експериментальне обмеження для маси фотона $< 4\cdot10^{-21}$ m_e або $< 10^{-60}$ г.

$$\Delta r_{man} = \frac{\hbar}{\hbar k} = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \sim \frac{5 \cdot 10^3}{6} \text{ Å} \sim 10^3 \text{ Å}. \qquad \text{(B.10)}$$

Тут враховано, що імпульс фотона $p = \hbar k$. Таким чином, розглядати фотон як локалізований в просторі об'єкт при його взаємодії з атомом принципово неможливо. Якщо фотон не є локалізованим в координатному просторі, то хвильова функція не може бути записана в координатному представленні.

У розділі 1 буде показана можливість запису хвильової функції фотона в імпульсному представленні.

РОЗДІЛ 1: Хвильова функція фотона.

Рівняння Максвела в просторі хвильових векторів.

Наша мета – дати корпускулярну інтерпретацію системи рівнянь Максвела, причому вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ повинні виступати величинами, що описують стан фотона в квантовомеханічній системі. Тому спробуємо порівняти систему рівнянь Максвела з рівнянням Шредінгера. Для цього використаємо просторове перетворення Фур'є (тобто перехід до простору хвильових векторів):

$$\vec{E} = \int \vec{E}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k \,,\ \vec{H} = \int \vec{H}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k \,. \tag{1.1}$$

Так як $rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{H}}$, $rot\vec{H} = \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$, $div\vec{H} = 0$, $div\vec{E} = 0$, то

$$\dot{\vec{H}}_{\vec{k}} = -ic\left[\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}}\right] \qquad \vec{k}\vec{H}_{\vec{k}} = 0\,,$$

$$\dot{\vec{E}}_{\vec{k}} = ic\left[\vec{k} \times \vec{H}_{\vec{k}}\right] \qquad \vec{k}\vec{E}_{\vec{k}} = 0\,. \tag{1.2}$$

Зрозуміло, що $\vec{E}_{\vec{k}} = \vec{E}\left(\vec{k},t\right)$ і $\vec{H}_{\vec{k}} = \vec{H}\left(\vec{k},t\right)$. Накладаємо умову дійсності: $\vec{E}_{-\vec{k}} = \vec{E}^*_{\vec{k}}$, $\vec{H}_{-\vec{k}} = \vec{H}^*_{\vec{k}}$. Цій умові легко задовольнити, якщо зробити підстановку

$$\vec{E}_{\vec{k}} = N(k)\left(\vec{f}_{\vec{k}} + \vec{f}_{\vec{k}}{}^*\right),$$

$$\dot{\vec{E}}_{\vec{k}} = -ickN(k)\left(\vec{f}_{\vec{k}} - \vec{f}_{\vec{k}}{}^*\right), \tag{1.3}$$

де $N(k)$ – деякий нормуючий множник. Можна користуватися лише $\vec{E}_{\vec{k}}$ і $\dot{\vec{E}}_{\vec{k}}$, виключивши з розгляду $\vec{H}_{\vec{k}}$:

$$\vec{H}_{\vec{k}} = \frac{i}{ck^2}\left[\vec{k} \times \dot{\vec{E}}_{\vec{k}}\right]. \tag{1.4}$$

Підстановка (1.3) означає, що замість двох функцій $\vec{E}_{\vec{k}} = \vec{E}\left(\vec{k},t\right)$ і $\vec{H}_{\vec{k}} = \vec{H}\left(\vec{k},t\right)$ вводиться нова функція $\vec{f}_{\vec{k}}$. Тепер можна записати $\vec{E} = \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^*$, $\vec{H} = \vec{h} + \vec{h}^*$, де

$$\vec{\varepsilon} = \int N(k)\vec{f}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k \,,$$

$$\vec{h} = \int N(k)\left[\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{f}_{\vec{k}}\right] e^{i\vec{k}\vec{r}}\, d^3k\,. \qquad (1.5)$$

Отримаємо рівняння, якому повинна задовольняти функція $\vec{f}_{\vec{k}}$. Маємо

$$\dot{\vec{H}}_{\vec{k}} = -ic\left[\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}}\right],\ \vec{H}_{\vec{k}} = \frac{i}{ck^2}\left[\vec{k} \times \dot{\vec{E}}_{\vec{k}}\right],$$

звідки

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{ck^2}\left[\vec{k} \times \dot{\vec{E}}_{\vec{k}}\right]\right) = -ic\left[\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}}\right],$$

$$\frac{i}{ck^2}\left[\vec{k} \times \ddot{\vec{E}}_{\vec{k}}\right] = -ic\left[\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}}\right],$$

$$\left[\vec{k} \times \left(\ddot{\vec{E}}_{\vec{k}} + c^2k^2\vec{E}_{\vec{k}}\right)\right] = 0\ .$$

Оскільки електромагнітна хвиля – поперечна, то $\vec{k} \perp \vec{E}_{\vec{k}}$ та $\vec{k} \perp \ddot{\vec{E}}_{\vec{k}}$. Отже, цей векторний добуток дорівнює нулю лише тоді, коли

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2k^2\right)\vec{E}_{\vec{k}} = 0\,, \qquad (1.6)$$

тобто ми отримали рівняння руху поля в просторі хвильових векторів. З (1.3) випливає, що

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - ick\right)\vec{E}_k = -ickN(k)\left(\vec{f}_{\vec{k}} - \vec{f}_{\vec{k}}^{\,*}\right) - ickN(k)\left(\vec{f}_{\vec{k}} + \vec{f}_{\vec{k}}^{\,*}\right) =$$

$$= -2ickN(k)\vec{f}_k\ .$$

Перетворимо диференціальне рівняння другого порядку (1.6) в рівняння першого порядку:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2k^2\right)\vec{E}_{\vec{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + ick\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - ick\right)\vec{E}_k =$$

$$= -2ickN(k)\left(\frac{\partial}{\partial t} + ick\right)\vec{f}_k = 0\ ,$$

на основі чого отримаємо:

$$i\frac{\partial \vec{f}_{\vec{k}}}{\partial t} = ck\vec{f}_{\vec{k}}\ . \qquad (1.7)$$

Крім того, з (1.2) та (1.3) випливає

$$\vec{k}\vec{f}_{\vec{k}} = 0 \ . \qquad (1.8)$$

Помноживши вирази (1.7) та (1.8) на $\hbar$, перепишемо їх у вигляді:

$$i\hbar \frac{\partial f_{\vec{k}\alpha}}{\partial t} = \hbar c k f_{\vec{k}\alpha} \ \text{ та } \ \hbar k_\beta f_{\vec{k}\beta} = 0 \,, \qquad (1.9)$$

де $\alpha, \beta = \overline{x, y, z}$. Помножимо останнє співвідношення справа на ck_α / k і віднімемо від першого. Отримаємо:

$$i\hbar \frac{\partial f_{\vec{k}\alpha}}{\partial t} = \hbar c k f_{\vec{k}\alpha} - \hbar c \frac{k_\alpha k_\beta}{k} f_{\vec{k}\beta} = \hbar c k \delta_{\alpha\beta} f_{\vec{k}\beta} - \hbar c \frac{k_\alpha k_\beta}{k} f_{\vec{k}\beta} = \hbar c k \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) f_{\vec{k}\beta} \,.$$

Введемо оператор $w_{\alpha\beta} = \hbar c k \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right)$. У результаті отримаємо:

$$i\hbar \frac{\partial f_{\vec{k}\alpha}}{\partial t} = w_{\alpha\beta} f_{\vec{k}\beta} \qquad \text{або ж}$$

$$i\hbar \frac{\partial \vec{f}_{\vec{k}}}{\partial t} = \hat{w} \vec{f}_{\vec{k}} \ , \qquad (1.10)$$

$$\text{де } \left(\hat{w} \vec{f}_{\vec{k}} \right)_\alpha = \hbar c k \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) f_{\vec{k}\beta} \,. \qquad (1.11)$$

Таким чином, ми отримали рівняння (1.10) з додатковою умовою $\vec{k}\vec{f}_{\vec{k}} = 0$, яке є еквівалентним системі рівнянь Максвела. Рівняння (1.10) має вигляд рівняння Шредінгера, в якому роль оператора Гамільтона виконує оператор $\hat{w}$, дія якого на функцію $\vec{f}_{\vec{k}}$ визначається співвідношенням (1.11), причому власними значеннями цього оператора є $\hbar c k = \hbar \omega$.

<u>Хвильова функція фотона в імпульсному представленні</u>

Покажемо, що функцію $\vec{f}_{\vec{k}}$ можна при відповідному нормуванні інтерпретувати як хвильову функцію фотона в імпульсному представленні, а $\hat{w}$ – як оператор енергії фотона (оператор Гамільтона). Для цього доведемо, що енергію електромагнітного поля

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left(E^2 + H^2\right)d^3r \qquad (1.12)$$

та імпульс

$$\vec{p} = \frac{1}{4\pi c}\int\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]d^3r \qquad (1.13)$$

можна подати у вигляді $W = \hbar c\int k\left(\vec{f}_{\vec{k}}{}^{*}\vec{f}_{\vec{k}}\right)d^3k$ та $\vec{p} = \hbar\int\vec{k}\left(\vec{f}_{\vec{k}}{}^{*}\vec{f}_{\vec{k}}\right)d^3k$.

З виразу (1.12) випливає, що

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left(\vec{E}_{\vec{k}}\vec{E}_{\vec{k}'} + \vec{H}_{\vec{k}}\vec{H}_{\vec{k}'}\right)e^{i\left(\vec{k}+\vec{k}'\right)\vec{r}}d^3kd^3k'd^3r\,. \qquad (1.14)$$

Використаємо співвідношення $\int e^{i\vec{k}\vec{r}}d^3r = \left(2\pi\right)^3\delta\left(\vec{k}\right)$, де $\delta\left(\vec{k}\right)$ – тривимірна δ-функція. Враховуючи, що $\vec{H}_{\vec{k}} = \frac{i}{ck^2}\left[\vec{k}\times\dot{\vec{E}}_{\vec{k}}\right]$, отримаємо:

$$W = \pi^2\int\left(\vec{E}_{\vec{k}}\vec{E}_{-\vec{k}} + \frac{1}{c^2k^2}\dot{\vec{E}}_{\vec{k}}\dot{\vec{E}}_{-\vec{k}}\right)d^3k \Rightarrow$$

$$W = 4\pi^2\int N^2\left(k\right)\left(\vec{f}_{\vec{k}}{}^{*}\vec{f}_{\vec{k}}\right)d^3k = \hbar c\int k\left(\vec{f}_{\vec{k}}{}^{*}\vec{f}_{\vec{k}}\right)d^3k\,,$$

де множник нормування $N\left(k\right)$ вибрано у вигляді $N\left(k\right) = \frac{\sqrt{\hbar ck}}{2\pi}$.

Розглянемо такий вираз:

$$\vec{f}_{\vec{k}}{}^{*}\hat{w}\vec{f}_{\vec{k}} = f^{*}_{\vec{k}\alpha}w_{\alpha\beta}f_{\ \vec{k}\beta} = \hbar ckf^{*}_{\vec{k}\alpha}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)f_{\ \vec{k}\beta} =$$

$$= \hbar ck\left(f^{*}_{\vec{k}\alpha}\delta_{\alpha\beta}f_{\ \vec{k}\beta} - \frac{\left(f^{*}_{\vec{k}\alpha}k_\alpha\right)\left(k_\beta f_{\ \vec{k}\beta}\right)}{k^2}\right)\left(=\right)\ ,$$

враховуючи, що $\vec{k}\vec{f}_{\vec{k}} = 0$, отримаємо $k_\alpha f^{*}_{\vec{k}\alpha} = k_\beta f_{\ \vec{k}\beta} = 0$, а отже:

$$\left(=\right)\hbar ck\,f^{*}_{\vec{k}\alpha}f_{\ \vec{k}\alpha} = \hbar ck\ \left(\vec{f}_{\vec{k}}{}^{*}\vec{f}_{\vec{k}}\right)\,.$$

Тому можна записати:

$$W = \int \vec{f}_{\vec{k}}^{*} \hat{w} \vec{f}_{\vec{k}} d^3k \,. \qquad (1.15)$$

Аналогічно для імпульсу можна отримати:

$$\vec{p} = \hbar \int f_{\vec{k}j}{}^{*} \vec{k} f_{\vec{k}j} d^3k \text{, де } j = \overline{x, y, z} \,. \qquad (1.16)$$

Розглянемо монохроматичний розв'язок рівняння $i\hbar \dfrac{\partial \vec{f}_k}{\partial t} = \hat{w} \vec{f}_k$, а саме $\vec{f}_{\vec{k}} = \vec{f}_0(\vec{k}) e^{-i\omega t}$, де $\omega = ck$ і функція $\vec{f}_0(\vec{k})$ відмінна від нуля тільки при $\omega = ck$. Енергія поля при цьому набуває вигляду $W = \hbar\omega \int \left(\vec{f}_{\vec{k}}{}^{*} \vec{f}_{\vec{k}} \right) d^3k$. Припустимо тепер, що поле має лише один фотон на частоті ω. Тоді енергія поля, очевидно, є рівною $\hbar\omega$: $W = \hbar\omega$. Таким чином функція $\vec{f}_{\vec{k}}$ повинна задовольняти умові $\int \left(\vec{f}_{\vec{k}}{}^{*} \vec{f}_{\vec{k}} \right) d^3k = 1$, тобто умові нормування хвильової функції фотона $\vec{f}_{\vec{k}}$ в просторі імпульсів. А величину $\left| \vec{f}_{\vec{k}} \right|^2$ можна інтерпретувати як густину ймовірності того, що фотон має імпульс $\vec{k}$. Тоді вирази для енергії та імпульсу набувають сенсу квантовомеханічних середніх значень енергії та імпульсу фотона.

<u>Хвильова функції фотона у випадку дискретного спектра.</u>

Розглянемо хвильову функцію фотона у випадку дискретного спектра. Для переходу до дискретного спектру слід увести нормуючий об'єм V і вважати, що всередині нього і зосереджене все поле. На границі області V можна задати граничні умови, які виберуть із сукупності розв'язків рівнянь Максвела дискретний спектр розв'язків, що задовольняють цим граничним умовам. Простіше всього вибрати об'єм у вигляді куба з ребрами a і вважати, що граничні умови зводяться до простої періодичності полів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ з періодом a по кожній з декартових осей. Цим граничним умовам задовольняють лише ті поля, для яких компоненти хвильового вектора визначаються співвідношеннями $k_i = \dfrac{2\pi}{a} n_i$, де n_i = 1,2,3, ... Тобто k –простір розбивається на комірки з об'ємом

$$\Delta = \frac{(2\pi)^3}{V}, \tag{1.18}$$

причому одній комірці відповідає одне допустиме значення $\vec{k}$. Таким чином, кількість різних значень $\vec{k}$ у деякому об'ємі d^3k:

$$dn = \frac{d^3k}{\Delta} = \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3}. \tag{1.19}$$

В результаті інтегрування в k-просторі може бути замінене сумуванням по комірках. Так для довільної функції $F(\vec{k})$: $\int F(\vec{k})d^3k = \Delta\sum_{\vec{k}} F(\vec{k})$, де сумування проводиться по всім можливим дискретним значеннях $\vec{k}$. Наприклад, для поля $\vec{E}$ отримаємо :

$$\vec{E} = \Delta\sum_{\vec{k}} N(k)\left(\vec{f}_{\vec{k}} + \vec{f}^{*}_{\vec{k}}\right)e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{1.20}$$

Умовою нормування є $\Delta\sum_{\vec{k}} \vec{f}_{\vec{k}}^{\,*}\vec{f}_{\vec{k}} = 1$. Якщо об'єм V вибрати достатньо великим, то результати розрахунків характеристик поля не будуть залежати ні від форми об'єму V, ні від характеру граничних умов.

<u>Фотон із визначеним імпульсом</u>

Розглянемо стан фотона з визначеним імпульсом $\vec{p}$. Фотону у стані з визначеним імпульсом відповідає плоска хвиля. А тому, вважаючи k-простір дискретним, можна для хвильової функції фотона у такому стані записати:

$$\vec{f}_{\vec{p},\vec{e}} = i\frac{\vec{e}}{\sqrt{\Delta}}\delta_{\hbar\vec{k},\vec{p}}e^{-i\omega t}, \tag{1.21}$$

де $\omega = cp$, $\vec{e}$ – вектор поляризації фотона. $|\vec{e}| = 1$, $\vec{e}\vec{p} = 0$. Тут $\delta_{\hbar\vec{k},\vec{p}} = \begin{cases} 0, \hbar\vec{k} \neq \vec{p} \\ 1, \hbar\vec{k} = \vec{p} \end{cases}$. При заданому $\vec{p}$ можливі два лінійно незалежних вектори поляризації $\vec{e}$, тобто стани з визначеним імпульсом двічі вироджені.

Можливі стани поляризації фотона з визначеним імпульсом

Будемо позначати лінійно незалежні вектори поляризації через $\vec{e}^{(1)}$ та $\vec{e}^{(2)}$, причому для них виконується умова ортогональності

$$\vec{e}^{(1)} \cdot \vec{e}^{(2)} = 0. \qquad (1.22)$$

Якщо направити вісь *z* вздовж імпульсу фотона $\vec{p}$, то орти $\vec{e}^{(1)}$ та $\vec{e}^{(2)}$ можна спрямувати вздовж осей *x* та *y*. Вектор поляризації $\vec{e}$ фотона з визначеним імпульсом можна розкласти по цим двом взаємно ортогональним ортам $\vec{e}^{(1)}$ та $\vec{e}^{(2)}$:

$$\vec{e} = a_1\vec{e}^{(1)} + a_2\vec{e}^{(2)}. \qquad (1.23)$$

Таким чином, стан поляризації довільного фотона при заданому базисі визначається парою чисел a_1 та a_2, в загальному випадку комплексних. Величини $|a_1|^2$ та $|a_2|^2$ являють собою ймовірності знаходження фотона в станах з поляризаціями $\vec{e}^{(1)}$ та $\vec{e}^{(2)}$, причому $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. Можна записати

$$\vec{e} = \frac{\vec{e}^{(1)} + ae^{i\beta}\vec{e}^{(2)}}{\sqrt{1+a^2}}. \qquad (1.24)$$

Якщо покласти $a = tg\alpha$, то

$$\vec{e} = \vec{e}^{(1)}\cos\alpha + e^{i\beta}\vec{e}^{(2)}\sin\alpha. \qquad (1.25)$$

Цей вираз описує так званий чистий стан поляризації фотона, яким в загальному випадку є стан еліптичної поляризації[1]. Перехід від одного

---

[1] Наприклад, якщо базисні поляризації $\vec{e}^{(1)}$ та $\vec{e}^{(2)}$ є лінійні, то при $\beta \neq 0, \pi$ маємо лінійну, при $\beta = \pi/2$ - еліптичну поляризацію, яка при $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ переходить в циркулярну.

чистого стану до іншого здійснюється за допомогою відповідного унітарного перетворення.

В якості лінійно незалежних станів (векторів) поляризації можна в принципі обрати будь яку пару одиничних комплексних векторів типу (1.24), що задовольняють умові ортогональності

$$\vec{e}^{(1)} \cdot \vec{e}^{(2)^*} = 0. \qquad (1.25)$$

Звичайно обирають вектори

$$\vec{e}^{(R)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^{(1)} + i\vec{e}^{(2)}) \text{ та } \vec{e}^{(L)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^{(1)} - i\vec{e}^{(2)}), \qquad (1.26)$$

що відповідають правій та лівій циркулярній поляризації. Отже величини $\vec{p}$ та $\vec{e}^{(\mu)}$ $(\mu = 1,2)$ утворюють повний набір квантових чисел фотона, а система функцій $f_{\vec{p}\mu}(\vec{k},t)$ є повна ортонормована система, по якій можна розкласти довільну хвильову функцію фотона.

Момент імпульсу фотона

Оператор моменту

Стани фотона можна класифікувати не лише за значенням імпульсу, а й за моментом імпульсу. Такій класифікації відповідає розклад електромагнітного поля не по плоских, а по сферичних хвилях.

Для визначення оператора моменту імпульсу фотона скористаємось виразом для моменту імпульсу електромагнітного поля:

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi}\int \left[\vec{r} \times \left[\vec{E} \times \vec{H}\right]\right] d^3r. \qquad (1.27)$$

Підставимо в (1.27) поля $\vec{E}$ та $\vec{H}$, виражені через хвильову функцію одного фотона $\vec{f}_{\vec{k}}$ (див. співвідношення (1.5)). В результаті отримаємо момент імпульсу одного фотона:

$$\vec{\hat{M}} = \int \vec{f}^*_{\vec{k}} \, \hat{\hat{J}} \, \vec{f}_{\vec{k}} d^3k, \qquad (1.28)$$

де $\hat{\hat{J}}$ має зміст оператора моменту імпульсу фотона в k-представленні. Можна показати що

$$\hat{\vec{J}} = -i\hbar\left[\vec{k}\times\vec{\nabla}_k\right] + \hat{\vec{S}}\ , \qquad (1.29)$$

де дія оператора $\hat{\vec{S}}$ на хвильову функцію фотона визначається співвідношенням

$$\left(\hat{S}_\alpha \vec{f}_{\vec{k}}\right)_\beta = -i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_{\vec{k}\gamma}\ . \qquad (1.30)$$

У результаті отримаємо вираз для моменту імпульсу фотона:

$$M_\alpha = \hbar\int f^*_{\vec{k}\beta}\left(-i\left[\vec{k}\times\vec{\nabla}_{\vec{k}}\right]_\alpha f_{\vec{k}\beta} - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_{\vec{k}\gamma}\right)d^3k\ . \qquad (1.31)$$

Перший доданок має структуру звичайного квантовомеханічного оператора орбітального моменту імпульсу в імпульсному представленні:

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar\left[\vec{k}\times\vec{\nabla}_k\right]. \qquad (1.32)$$

Другий доданок у (1.29) можна назвати оператором спінового моменту. Але для фотона не можна застосовувати звичайне визначення спіну, як власного моменту, оскільки його маса рівна нулю. Виділення окремо орбітального та спінового моментів фотона є лише певним математичним прийомом, який полегшує фізичний аналіз властивостей оператора повного моменту.

Таке представлення дозволяє побудувати хвильові функції станів фотона з визначеним значенням моменту $\hat{\vec{J}}$ з більш простих власних функцій орбітального моменту і спіну. Хвильову функцію фотона можна представити у вигляді $\vec{f}_k = f(\vec{k},\alpha)$, де α – векторний індекс, що може набувати значень 1,2,3. Функція $f\left(\vec{k},\alpha\right)$ тепер являє собою скаляр в узагальненому просторі імпульсів та спіну. Різні проекції вектора $\vec{f}_k$ тепер можна розглядати як значення скаляра $f\left(\vec{k},\alpha\right)$ в різних точках спінового простору. Оператор $\hat{\vec{L}}$ діє тільки на змінні $\vec{k}$, а оператор $\hat{\vec{S}}$ – тільки на спінові змінні.

Оператор орбітального моменту $\hat{\vec{L}}$

Властивості оператора $\hat{\vec{L}}$ добре відомі з квантової механіки. Його проекції задовольняють перестановочному співвідношенню

$\left[\hat{L}_i \times \hat{L}_j\right] = i\hbar\hat{L}_k$, де $i, j, k = \overline{1,3}$ – циклічний набір індексів, тобто

$$\hat{L}_2\hat{L}_3 - \hat{L}_3\hat{L}_2 = i\hbar\hat{L}_1,\ \hat{L}_3\hat{L}_1 - \hat{L}_1\hat{L}_3 = i\hbar\hat{L}_2,\ \hat{L}_1\hat{L}_2 - \hat{L}_2\hat{L}_1 = i\hbar\hat{L}_3. \quad (1.33)$$

Оскільки квадрат оператора $\hat{\vec{L}}$ комутує з його проекціями, то вони мають спільну систему власних функцій:

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\vec{n}) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\vec{n});\quad \hat{L}_i Y_{lm}(\vec{n}) = \hbar m Y_{lm}(\vec{n}), \quad (1.34)$$

де $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$, l = 0,1,2,3…, $m = -l,...,0,...,l$, $Y_{lm}(\vec{v})$ – сферична функція, нормована в $\vec{k}$ -просторі:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \left[\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}.$$

Оператор спіну фотона $\hat{\vec{S}}$

Компоненти оператора спіну задовольняють таким самим перестановочним співвідношенням, що й компоненти оператора $\hat{\vec{L}}$. Позначимо власні функції операторів $\hat{S}^2$ та $\hat{S}_3$ через $\vec{\chi}_{s\mu}(\alpha)$, де s та μ – спінові квантові числа. Користуючись визначенням оператора $\hat{\vec{S}}$ (див. співвідношення (1.30)), можна отримати представлення операторів $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$ у вигляді матриць :

$$\hat{S}_1 = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\quad \hat{S}_2 = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \hat{S}_3 = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Ясно, що:

$$\hat{S}^2 = \hbar^2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \hbar^2 S(S+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Звідси S=1. Таким чином, S приймає тільки одне значення.
Зрозуміло що

$$\hat{S}^2\vec{\chi}_\mu(\alpha)=2\hbar^2\vec{\chi}_\mu(\alpha),\ \text{та}\ \hat{S}_3\vec{\chi}_\mu(\alpha)=\mu\hbar\vec{\chi}_\mu(\alpha), \qquad (1.37)$$

де оскільки $S=1$, то відповідний індекс у спіновій хвильовій функції $\vec{\chi}_{s\mu}(\alpha)$ можна не писати. Використавши явний вигляд операторів $\hat{S}_i$, можна отримати вирази для власних функцій операторів $\hat{S}_3$ та $\hat{S}^2$:

$$\vec{\chi}_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{\chi}_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{\chi}_{+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}. \qquad (1.38)$$

Ці функції – ортонормовані: $\vec{\chi}^*_{\mu'}\vec{\chi}_\mu=\delta_{\mu\mu'}$. По цим ортонормованим векторам можна розкласти вектор довільної хвильової функції фотона: $\vec{f}=\sum_{\mu=-1}^{1}f^\mu\vec{\chi}_\mu$. Величини f^μ – контрваріантні складові вектора $\vec{f}$. Вони зв'язані з декартовими складовими вектора $\vec{f}$ співвідношеннями

$$f^0=f_z;\ \ f^{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_x\mp if_y\right). \qquad (1.39)$$

Коваріантні складові визначаються таким чином:

$$f_\mu=(-1)^\mu f^{-\mu}. \qquad (1.40)$$

<u>Спіральність фотона</u>

Розглянемо стан фотона з визначеним імпульсом $\vec{p}$. Оскільки імпульс не комутує з моментом імпульсу, то такий стан не має визначеного моменту. Проте він може мати визначені значення проекції моменту на напрямок імпульсу $\vec{p}$. Дійсно, виберемо за вісь квантування вісь z, що співпадає з напрямком $\vec{p}$. Так як $\vec{p}\vec{L}=0$, то проекція повного моменту визначається тільки проекцією спіну. Але оператор імпульсу комутує з оператором спіну (вони діють у різних просторах, тобто діють на різні змінні). Тому разом із $\vec{p}$ можна задавати і значення μ. Такі стани називаються спіральними, а величина μ – спіральністю.

Властивості спіральності.

1. Спіральність інваріантна відносно поворотів простору.

2. Спіральність інваріантна відносно таких перетворень Лоренца, що не змінюють напрямку $\vec{p}$.

3. При просторовому відбитті спіральність змінює знак.

Для фотона спіральність $\mu = \pm 1$. Значення проекції спіну μ=0 не узгоджується з умовою поперечності електромагнітного поля. Двом значенням спіральності відповідають дві можливі поляризації фотона. З порівняння формул для векторів циркулярної поляризації фотона та векторів $\vec{\chi}_{\mu}(\alpha)$ випливає, що: $\vec{e}^{(R)} = \vec{\chi}_1$, $\vec{e}^{(L)} = \vec{\chi}_{-1}$. У даному випадку фотон із позитивною спіральністю відповідає правій циркулярній поляризації і навпаки.

<u>Стани фотона з визначеним моментом імпульсу</u>

Оскільки компоненти комутуючих операторів $\hat{\vec{L}}$ і $\hat{\vec{S}}$ задовольняють однаковим перестановочним співвідношенням, то тим самим співвідношенням задовольняють і компоненти оператора повного моменту фотона $\hat{\vec{J}}$:

$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = i\hbar\hat{J}_k$, де $i, j, k = \overline{1,3}$ – циклічний набір індексів. (1.41)

Власні значення оператора $\hat{J}^2$: $\hbar^2 j(j+1)$. У випадку фотона j – ціле. Оператор моменту імпульсу фотона комутує з оператором його енергії. Тому розглянемо можливі стани фотона з визначеними значеннями $\hbar\omega$, j, j_3. Власні функції цих станів визначаються рівняннями:

$\hat{J}^2\vec{Y}_{jM}(\vec{n}) = \hbar^2 j(j+1)\vec{Y}_{jM}(\vec{n})$ та $\hat{J}_3\vec{Y}_{jM}(\vec{n}) = \hbar M\vec{Y}_{jM}(\vec{n})$, (1.42)

де $\vec{Y}_{jM}(\vec{n})$ – векторні сферичні функції. Аналогічно попередньому, ввівши спінову змінну α, можна записати: $\left(\vec{Y}_{jM}(\vec{n})\right)_{\alpha} = Y_{jM}(\vec{n}, \alpha)$.

Щоб побудувати функцію $Y_{jM\alpha}(\vec{n})$ можна скористатися відомими квантовомеханічними правилами додавання моментів:

$$\psi_{jM} = \sum_{m_1, m_2} C^{jM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}, \qquad (1.43)$$

де $C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$ – коефіцієнти векторного додавання або коефіцієнти Клебша-Гордана (див. [5], ст. 43). Оскільки спін фотона дорівнює 1 $(S=1)$ для даного j можливі три різні стани з різними l:

$$\begin{cases} l=j,\ \ l=j\pm 1 \ \text{ при}\, j\neq 0, \\ l=1 \ \text{при} \ j=0. \end{cases} \tag{1.44}$$

У нашому випадку потрібно побудувати хвильову функцію системи, що складається з двох невзаємодіючих підсистем: орбітальних і спінових ступенів вільності фотона, що описуються змінними $\vec{k}$ і α:

$$\vec{Y}_{jlM}\left(\vec{n}\right)=\sum_{M,\mu} C^{jM}_{lm1\mu} Y_{lm}\left(\vec{n}\right)\vec{\chi}_{\mu}\text{, де } m+\mu=M\,. \tag{1.45}$$

Стани фотона з визначеними j та M описуються у загальному випадку лінійною комбінацією трьох сферичних векторів:

$$\vec{f}_{jM}\left(\vec{k}\right)=\sum_{l=j-1}^{j+1} a_l \vec{Y}_{jlM}\left(\vec{n}\right). \tag{1.46}$$

Проте коефіцієнти цієї лінійної комбінації не є незалежними, оскільки хвильова функція фотона повинна задовольняти умові поперечності: $\vec{k}\,\vec{f}_{jM}\left(\vec{k}\right)=0$. В результаті маємо не три, а два стани фотона із заданими числами j та M. Для того щоб умова поперечності задовольнялася автоматично, можна скористатися не трьома сферичними векторами $\vec{Y}_{jlM}\left(\vec{n}\right)$, а трьома векторами, які є деякими їх лінійними комбінаціями: $\vec{Y}^{(\lambda)}_{jM}\left(\vec{n}\right)$, де $\lambda=-1,0,1$. Два з них $(\lambda=0,1)$ – перпендикулярні вектору $\vec{k}$, а третій $(\lambda=-1)$ направлено вздовж $\vec{k}$. Це – так звані поперечні й повздовжня сферичні функції, які визначаються співвідношеннями:

$$\vec{Y}^{(0)}_{jM}\left(\vec{n}\right)=\vec{Y}_{jjM}\left(\vec{n}\right),\quad \vec{Y}^{(1)}_{jM}\left(\vec{n}\right)=\left[\vec{Y}^{(0)}_{jM}\left(\vec{n}\right)\times\vec{n}\right] \text{ та}$$

$$\vec{Y}^{(-1)}_{jM}\left(\vec{n}\right)=\vec{n}\,Y_{jM}\left(\vec{n}\right). \tag{1.47}$$

Тоді загальний вираз для хвильової функції фотона з визначеними j та M, що задовольняє умові поперечності :

$$\vec{f}_{jM}\left(\vec{k}\right)=a_0\vec{Y}_{jM}^{(0)}\left(\vec{n}\right)+a_1\vec{Y}_{jM}^{(1)}\left(\vec{n}\right). \qquad (1.48)$$

Складові, що входять до цього виразу, по-різному перетворюються при заміні $\vec{k}$ на $-\vec{k}$:

$$\vec{Y}_{jM}^{(\lambda)}\left(-\vec{n}\right)=\left(-1\right)^{j+\lambda}\vec{Y}_{jM}^{(\lambda)}\left(\vec{n}\right). \qquad (1.49)$$

Тому можна розрізняти стани фотона з визначеними j та M по їх парності. Парністю називають власні значення η_p оператора відбиття $\hat{P}$, який для векторного поля визначений таким чином:

$$\hat{P}\vec{f}\left(\vec{k}\right)=-\vec{f}\left(-\vec{k}\right). \qquad (1.50)$$

При заданих j та M можливі два стани фотона, що відрізняються парністю:

$$\eta_p=\left(-1\right)^{j+1+\lambda}, \qquad (1.51)$$

де λ=1 відповідає фотону електричного типу, λ=0 – фотону магнітного типу. Хвильова функція фотона у стані з визначеними значеннями ω, j, j_3 матиме вигляд:

$$\vec{f}_{j\omega\lambda M}\left(\vec{k},t\right)=i\sqrt{\frac{R}{\pi}}\frac{c}{\omega}\vec{Y}_{jM}^{(\lambda)}\left(\vec{n}\right)e^{-i\omega t}\delta_{ck,\omega}. \qquad (1.52)$$

Умова нормування цієї функції відповідає знаходженню одного фотона у сфері радіуса R.

При дипольних переходах: $j=1$ Тоді, при електродипольних переходах ($\lambda=1$) парність $\eta_p=\left(-1\right)^{1+1+1}=(-1)^3=-1$, а тому дозволеними є переходи між станами з різною парністю; при магнітодипольних переходах ($\lambda=0$) $\eta_p=\left(-1\right)^{1+1+0}=(-1)^2=1$, а тому дозволеними є переходи між станами з однаковою парністю; при електроквадрупольних переходах: $j=2$, а отже $\eta_p=\left(-1\right)^{2+1+1}=(-1)^4=1$ – дозволені переходи між станами з однаковою парністю.

При випромінювальних переходах між станами атома, молекули чи іншої квантової системи з різними значенням моменту імпульсу зміна моменту імпульсу атома (наприклад, зменшення) супроводжується відповідною зміною моменту імпульсу

електромагнітного поля (у нашому прикладі збільшенням) за рахунок моменту імпульсу випущеного атомом фотона. В процесі поглинання фотона його момент імпульсу передається атому. При цьому сумарний момент імпульсу системи атом – електромагнітне поле зберігається так само як і енергія та імпульс.

На передачі моменту імпульсу (кутового моменту) від пучка світла (фотонів) поляризованого по колу з частотою (енергією фотонів), що відповідає різниці енергій станів парамагнітних атомів в газоподібному стані заснована так звана *оптична орієнтація* таких атомів, відкрита французьким фізиком Кастлером (Alfred Kastler)[2] в 1953 р. Таким чином досягають орієнтації механічних кутових, а також зв'язаних з ними магнітних моментів атомів або іонів. Оптичну орієнтацію здійснено для парів атомів металів перших трьох груп таблиці Мендєлєєва. Можна здійснити також оптичну орієнтацію і атомів інертних газів, що знаходяться у метастабільних станах. Крім оптичної орієнтації атомів безпосередньо за рахунок передачі моменту імпульсу від циркулярно поляризованих фотонів для деяких атомів із специфічною будовою електронних оболонок можлива опосередкована орієнтація при зіткненнях з іншими, вже орієнтованими атомами, за рахунок так званого спінового обміну. Дія «внутрішньоатомного» магнітного поля орієнтованих електронних оболонок атомів може спричинити орієнтацію магнітних моментів ядер цих атомів (див. [6,7]).

Орієнтація магнітних моментів ядер інертних газів знайшла практичне застосування в медичній діагностиці, а саме при магнітнорезонансній томографії (методами ядерного магнітного резонансу – ЯМР) легенів (див. [6,7]). Проблема такого роду досліджень полягає в тому, що, по-перше, звичайний протонний сигнал ЯМР при температурі людського тіла взагалі дуже слабкий, оскільки пропорційний величині поляризації ядерних спінів P_B, яка в умовах теплової рівноваги визначається формулою

$$P_B = \frac{n^+ - n^-}{n^+ + n^-} = th\left(\frac{\mu_I B_0}{kT}\right), \qquad (1.53)$$

де n^+ та n^- - кількість спінів орієнованих паралельно та антипаралельно магнітному полю B_0, відповідно. В типовому томографі B_0=1.5 Т, отже для протонів, які дають внесок в сигнал ЯМР, поляризація ледве сягає величини P_B = 5×10^{-6}. По-друге,

[2] За це відкриття Кастлеру у 1966 р. присуджено Нобелівську премію.

концентрація протонів в тканинах легенів дуже низька та і самі легені мають порувату структуру. Сигнал ЯМР від газу, яким можна наповнити легені, також слабкий, оскільки густина його дуже мала порівняно з конденсованою речовиною. Але якщо наповнити легені газом з попередньо оптично орієнтованими ядрами, для яких P_B має нерівноважне значення близьке до одиниці, то можна отримати достатньо потужний сигнал, цілком достатній для досліджень. На сьогодні для таких застосувань розроблено два методи отримання орієнтованих інертних газів (інертні гази нешкідливі для людини при короткочасному наповненні легенів). Орієнтований ксенон ^{129}Xe отримують шляхом спінового обміну між атомами ксенону і рубідію Rb. Спін єдиного валентного електрона атома Rb поляризується при опроміненні циркулярно поляризованим світлом з довжиною хвилі 795 нм, що відповідає переходу між основним станом $5s^2S_{1/2}$ та збудженим станом $5p^2P_{1/2}$. Поляризація спіна передається спіну ядра інертного газу через магнітну надтонку взаємодію. Тиск інертного газу при цьому сягає декількох бар. Другий метод застосовний виключно для ^{3}He. Спочатку в плазмі при тиску порядку 1 мбар утворюються атоми ^{3}He в метастабільному стані $1s2s^3S_1$, які потім резонансним опроміненням циркулярно поляризованим світлом з $\lambda = 1083$ нм переводяться в орієнтований стан $1s2p^3P_0$. Енергія збудженого метастабільного атома потім передається іншому атому ^{3}He, а ядро першого атома залишається орієнтованим. Цей процес має характер каталітичної ланцюгової реакції, в результаті якої за декілька секунд плазма ^{3}He набуває поляризації 50% і досягає насичення близько 80%.

Принцип обміну кутовим моментом між циркулярно поляризованими фотонами і носіями заряду в напівпровіднику, що генеруються такими фотонами, лежить в основі явища оптичної орієнтації спінів носіїв струму в напівпровідниках: при лівій поляризації світла спіни орієнтуються вздовж напрямку поширення світла, а при правій – протилежно. Це явище вперше спостерігалось Лампелем (Lampel, 1968), а його теорія була створена в 1971 р. Перелєм і Дьяконовим.

Задовго до цих дослідів Садовський (1898 р.) передбачив виникнення макроскопічного обертового механічного моменту у тіла, яке опромінюють еліптично поляризованим світлом (ефект Садовського) і яке або поглинає це випромінювання, або змінює його стан поляризації. Садовський показав, що еліптично поляризована світлова хвиля має момент імпульсу, густина потоку якого в вакуумі

дорівнює $M = \frac{S}{\omega}\varepsilon$, де S –модуль вектора Пойнтінга (густина потужності), ε - ступінь еліптичності, ω - кутова частота світла. Величина ефекту Садовського дуже мала. Вона зростає при зменшенні частоти, оскільки при одній і тій самій густині потужності кількість фотонів в пучку обернено пропорційна їх енергії (частоті), а величина проекції моменту імпульсу фотона на напрям руху фотона однакова для всіх фотонів незалежно від їх енергії і дорівнює $\hbar$. Для поляризованих по колу ($\varepsilon = 1$) сантиметрових електромагнітних хвиль ($\omega = 10^{10}$ с$^{-1}$) і при густині потужності $S = 1$ Вт·см$^{-2}$: $M = 10^{-8}$ Н·см$^{-1}$. Незважаючи на такі малі величини ефект Садовського спостерігався вперше у сантиметровому (Р. Бет, 1935), а потім і у видимому діапазоні. Цікавим з точки зору демонстрації незалежності закону збереження моменту імпульсу від закону збереження енергії для системи електромагнітне поле – речовина є обмін кутовим моментом між потоком циркулярно поляризованих фотонів і прозорим тілом – кристалічною чвертьхвильовою пластинкою, яка перетворює циркулярно поляризоване світло на лінійно поляризоване без зміни його інтенсивності. При цьому виникає обертальний момент, що намагається повернути пластинку в напрямку обертання електричного та магнітного векторів падаючої електромагнітної хвилі. При падінні лінійно поляризованого світла на ту саму пластинку так, щоб на її виході утворювалось циркулярно поляризоване світло, виникає обертовий момент направлений протилежно напрямку обертання електричного та магнітного векторів народженої електромагнітної хвилі (своєрідний ефект „віддачі").

Як прояв ефекту Садовського на мікроскопічному рівні можна розглядати обмін моментом імпульсу між циркулярно поляризованими фотонами і специфічними елементарними збудженнями кристалічної ґратки гіротропних кристалів – гіронів. Атоми (іони), що беруть участь у таких збудженнях, рухаються не по лінійним, як у випадку звичайних фононів, а по коловим траєкторіям, внаслідок чого ці збудження мають кутовий момент, відмінний від нуля. В одновісних гіротропних кристалах падаючий на гіротропний кристал в напрямку оптичної осі циркулярно поляризований фотон у стоксовому процесі породжує лінійно поляризований фотон розсіяного світла, що поширюється в напрямку перпендикулярному оптичній осі. Момент імпульсу падаючого фотона перебирає на себе гірон, тобто кристалічна гратка. В антистоксовому процесі також народжується лінійно поляризований фотон розсіяного світла, що поширюється в напрямку

перпендикулярному оптичній осі, а закон збереження моменту імпульсу виконується за рахунок зникнення гірона з моментом імпульсу протилежним моменту імпульсу падаючого фотона. Цікаво, що спостерігаються і обернені в часі процес, коли лінійно поляризовані фотони, що падають на одновісний гіротропний кристал в напрямку перпендикулярному оптичній осі, разом з гіронами породжують в напрямку оптичної осі циркулярно поляризовані фотони розсіяного світла. Ці явища вперше спостерігались на кафедрі експериментальної фізики Слободянюком та співробітниками в 1983-94 рр. (див. [8,9]).

Необхідно зауважити, що в 1992 р. Групою з Лейденського університету в Нідерландах було введено поняття орбітального моменту світлового пучка для неоднорідних пучків з азимутальною залежністю фази (див. [10,11]), причому цей орбітальний момент існує незалежно від стану поляризації пучка. У таких пучках вектор Пойнтінга в точках поза віссю пучка не є більше паралельним осі пучка. Орбітальний момент у цьому видку зумовлений поперечною складовою вектора Пойнтінга.

РОЗДІЛ 2: Квантування вільного електромагнітного поля

Електромагнітне поле можна описувати векторним і скалярним потенціалами. Використаємо кулонівську калібровку векторного потенціалу: $div\vec{\mathrm{A}} = 0,$ а для скалярного потенціалу запишемо умову відсутності зарядів: $\varphi = 0$.Тоді:

$$\vec{H} = rot\vec{\mathrm{A}} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}}\right];$$
$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t}. \tag{2.1}$$

Розглянемо електромагнітне поле, яке знаходиться в деякій порожнині, розміри якої набагато більші, ніж довжина хвилі: $L_i >> \lambda$, де $i = x, y, z$ (рис. 2.1). Розкладемо $\vec{\mathrm{A}}$ по плоским хвилям в ряд Фур'є:

$$\vec{\mathrm{A}} = \sum_{\vec{k}} (\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{a}^*_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{r}}). \tag{2.2}$$

Для плоских хвиль: $\left|\vec{A}\right| \sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$, тоді відповідно: $\left|\vec{a}_k\right| \sim e^{-i\omega t}$, $\left|\vec{a}^*_k\right| \sim e^{i\omega t}$. Отже, коефіцієнти Фур'є залежать лише від часу. Оскільки $div\vec{\mathrm{A}} = \vec{k} \cdot \vec{\mathrm{A}} = 0$, то звідси випливає, що $\vec{k}\vec{a}_{\vec{k}} = 0$, $\vec{k}\vec{a}^*_{\vec{k}} = 0$, тобто $\vec{k} \perp \vec{a}_{\vec{k}}, \vec{a}^*_{\vec{k}}$. Векторний потенціал $\vec{A}$ задовольняє рівнянню:

$$\ddot{\vec{A}} + c^2 k^2 \vec{A} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{a}}_{\vec{k}} + c^2 k^2 \vec{a}_{\vec{k}} = 0. \tag{2.3}$$

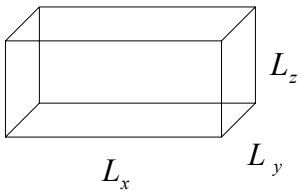


Рис. 2.1

Розглянемо, які значення може приймати $\vec{k}$, коли електромагнітне поле знаходиться в порожнині. Застосовуємо циклічні граничні умови:

$$\vec{A}(0) = \vec{A}(L_{x,y,z}) \Rightarrow e^{ik_x L_x} = 1; e^{ik_y L_y} = 1; e^{ik_z L_z} = 1 \Rightarrow$$

$k_i L_i = 2\pi n_i$, де $n_i \in \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел. А отже:

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i} \ . \tag{2.4}$$

Звідси видно, що $\vec{k}$ не є довільним, а набуває дискретних значень. Але сусідні значення $\vec{k}$ відрізняються мало. Спектр $\vec{k}$ – квазінеперервний. Розглянемо інтервал значень $k_i, k_i + dk_i$, де $dk_i = \frac{2\pi}{L_i} dn_i$. Якщо dn_i – кількість можливих значень k_i в інтервалі $k_i, k_i + dk_i$, то тоді отримаємо:

$$dn_i = \frac{L_i}{2\pi} dk_i \ , \ i = x, y, z \tag{2.5}$$

Тоді повна кількість векторів $\vec{k}$, компоненти яких лежать в інтервалах $k_x, k_x + dk_x$; $k_y, k_y + dk_y$; $k_z, k_z + dk_z$ відповідно, є рівною

$$dn_x dn_y dn_z = \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z ,$$

а оскільки кожному вектору $\vec{k}$ відповідає один стан, то відповідна кількість станів:

$$dn = \prod_{i=x,y,z} dn_i = \frac{V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z \ . \tag{2.6}$$

Нас цікавить кількість станів в інтервалі $k, k + dk$, а тому необхідно проінтегрувати по тілесному куту 4π. Отримаємо:

$$dn = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \ . \tag{2.7}$$

Нас цікавить густина станів – кількість станів в одиничному інтервалі значень k: $g(k) = \frac{dn}{dk} = \frac{V}{2\pi^2} k^2$. Оскільки для поперечної хвилі з певними значенням $\vec{k}$ можливі дві незалежні поляризації, то знайдену густину станів необхідно помножити на 2:

$$g(k)=\frac{dn}{dk}=\frac{V}{\pi^2}k^2. \qquad (2.8)$$

Знайдемо спектральну густину станів, тобто кількість станів, що припадає на одиничний інтервал частот: $g\left(\omega\right)=\frac{dn}{d\omega}$. Використовуючи співвідношення $\omega=ck$, перейдемо від $g(k)$ до $g\left(\omega\right)$:

$$dn=g(k)dk=g(\omega)d\omega, \text{ звідки: } g(\omega)=g(k\left(\omega\right))\frac{dk}{d\omega}. \qquad (2.9)$$

Для вільного електромагнітного поля в порожнині:

$$g(\omega)=\frac{V}{\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{1}{c} \Rightarrow g(\omega)=\frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}. \qquad (2.10)$$

Повернемось до $\vec{\mathrm{A}}$. Знайдемо енергію вільного електромагнітного поля в порожнині об'ємом V:

$$\varepsilon=\frac{1}{8\pi}\int\left(E^2+H^2\right)dV. \qquad (2.11)$$

Напруженість електричної складової поля:

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\sum_{\vec{k}}\left(\dot{\vec{a}}_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\vec{r}}+\dot{\vec{a}}^*_{\vec{k}}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)=i\sum_{\vec{k}}k\left(\vec{a}_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\vec{r}}-\vec{a}^*_{\vec{k}}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right); \qquad (2.12)$$

напруженість магнітної складової поля:

$$\vec{H}=rot\vec{A}=\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]=i\sum_{\vec{k}}\left(\left[\vec{k}\times\vec{a}_{\vec{k}}\right]e^{i\vec{k}\vec{r}}-\left[\vec{k}\times\vec{a}^*_{\vec{k}}\right]e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right). \qquad (2.13)$$

Отже:

$$\int_V E^2dV=\sum_{\vec{k}}\int\left(\vec{a}_ke^{i\vec{k}\vec{r}}-\vec{a}^*_ke^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)^2dV=$$

$$=\sum_{\vec{k}}\int_V\left(\underbrace{a_k^2e^{2i\vec{k}\vec{r}}k^2}_{=0}+\underbrace{a_k^{*2}e^{-2i\vec{k}\vec{r}}k^2}_{=0}+2\vec{a}_k\vec{a}^*_kk^2\right)dV.$$

Оскільки:

$$\int_V e^{2i\vec{k}\vec{r}}dV = \prod_{j=x,y,z}\int e^{2ik_j r_j}dr_j = \prod_j \int_0^{L_j} e^{i\frac{4\pi}{L_j}n_j r_j}dr_j = \prod_j \frac{L_j}{4\pi n_j}\left(e^{i\frac{4\pi}{L_j}n_j L_j}-1\right)=0,$$

$r_j = x, y, z;$

$$\text{то}\int_V E^2 dV = 2V\sum_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}}k^2 . \qquad (2.14)$$

Аналогічно:

$$\int_V H^2 dV = \sum_{\vec{k}} 2V\left(\left[\vec{k}\times\vec{a}_{\vec{k}}\right]\cdot\left[\vec{k}\times\vec{a}^*_{\vec{k}}\right]\right).$$

Враховуючи, що $\vec{a}_{\vec{k}} \perp \vec{k}$, отримаємо: $\int_V H^2 dV = \sum_{\vec{k}} 2Vk^2\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}}$. (2.15)

Звідси знайдемо енергію електромагнітного поля:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}2\cdot 2V\sum_{\vec{k}} k^2\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi}V\sum_{\vec{k}} k^2\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}} . \qquad (2.16)$$

Перепишемо (2.16) з врахуванням (2.8)таким чином

$$\varepsilon = \sum_{\vec{k}}\frac{1}{2\pi}Vk^2\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}}\pi\frac{1}{2\pi^2}Vk^2\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}}\frac{\pi}{2}g\left(\vec{k}\right)\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}}\varepsilon_{\vec{k}} ,$$

$$\text{де } \varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\pi}{2}g(k)\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}} = \frac{\pi}{2}cg(\omega)\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}} - \qquad (2.18)$$

енергія однієї моди поля в порожнині, що характеризується певним вектором $\vec{k}$. Тоді повна енергія електромагнітного поля в порожнині дорівнює сумі енергій окремих мод поля:

$$\varepsilon = \sum_{\vec{k}}\varepsilon_{\vec{k}} . \qquad (2.19)$$

Імпульс електромагнітного поля можна визначити як

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2}\int_V \vec{S}dV \text{ , де } \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]. \qquad (2.20)$$

Можна показати, що

$$\vec{p} = \sum_{\vec{k}}\vec{p}_k \text{ , де } \vec{p}_k = \underbrace{\frac{\vec{k}}{k}}_{=\vec{n}}\frac{\varepsilon_{\vec{k}}}{c} = \frac{\varepsilon_{\vec{k}}}{c}\vec{n} . \qquad (2.21)$$

Таким чином, енергію поля можна подати як суму енергій плоских хвиль, причому кожній хвилі відповідає своє значення $\vec{k}$. Відповідно

імпульс поля можна представити як суму імпульсів плоских хвиль з певними значеннями $\vec{k}$.

Перехід до канонічних змінних

Перейдемо від плоскої хвилі до осцилятора. Введемо узагальнену координату та імпульс осцилятора:

$$\vec{Q}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\vec{a}_{\vec{k}} + \vec{a}^*_{\vec{k}}) \text{ – узагальнена координата,} \qquad (2.22)$$

$$\vec{P}_{\vec{k}} = -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\vec{a}_{\vec{k}} - \vec{a}^*_{\vec{k}}) \text{ – узагальнений імпульс,} \qquad (2.23)$$

де $\vec{Q}_{\vec{k}}$ і $\vec{P}_{\vec{k}}$ – дійсні величини. Із співвідношень (2.22) та (2.23) отримаємо:

$$\begin{cases} \vec{a}_{\vec{k}} = \dfrac{i}{k}\sqrt{\dfrac{\pi}{V}}(\vec{P}_{\vec{k}} - i\omega_k \vec{Q}_{\vec{k}}); \\ \vec{a}^*_{\vec{k}} = -\dfrac{i}{k}\sqrt{\dfrac{\pi}{V}}(\vec{P}_{\vec{k}} + i\omega_k \vec{Q}_{\vec{k}}). \end{cases} \qquad (2.24)$$

Звідси можна виразити енергію певної моди ЕМП, що задається хвильовим вектором $\vec{k}$, через узагальнені координату та імпульс:

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{V}{2\pi}k^2 \vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}^*_{\vec{k}} = \frac{V}{2\pi}k^2 \frac{1}{k^2}\frac{\pi}{V}(P^2_{\vec{k}} + \omega^2_k Q^2_{\vec{k}}) = \frac{1}{2}(P^2_{\vec{k}} + \omega^2_k Q^2_{\vec{k}}) . \qquad (2.25)$$

Тоді функція Гамільтона електромагнітного поля як сукупності гармонічних осциляторів (різних мод поля):

$$\mathrm{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2}(P^2_{\vec{k}} + \omega^2_k Q^2_{\vec{k}}) . \qquad (2.26)$$

Рівняння руху осцилятора: $\ddot{\vec{Q}}_{\vec{k}} + \omega^2_k \vec{Q}_{\vec{k}} = 0.$ Перейдемо від класичного до квантового осцилятора, тобто замінимо відповідні величини класичної механіки на оператори:

$\vec{Q}_{\vec{k}} \to \hat{\vec{Q}}_{\vec{k}}$, $\vec{P}_{\vec{k}} \to \hat{\vec{P}}_{\vec{k}}$, причому має місце співвідношення:

$$\left[\hat{\vec{P}}_{\vec{k}}, \hat{\vec{Q}}_{\vec{k}}\right] = \hat{\vec{P}}_{\vec{k}}\hat{\vec{Q}}_{\vec{k}} - \hat{\vec{Q}}_{\vec{k}}\hat{\vec{P}}_{\vec{k}} = -i\hbar;$$

$$\vec{a}_{\vec{k}} \to \hat{\vec{a}}_{\vec{k}}, \quad \vec{a}^{*}_{\vec{k}} \to \hat{\vec{a}}^{*}_{\vec{k}};$$

$$\vec{A} \to \hat{\vec{A}};$$

$$\vec{E} \to \hat{\vec{E}}; \quad \vec{H} \to \hat{\vec{H}}.$$

Виразимо $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{H}}, \hat{\vec{A}}$ через $\hat{\vec{P}}_{\vec{k}}$ і $\hat{\vec{Q}}_{\vec{k}}$:

$$\hat{\vec{A}} = \sum_{\vec{k}} \left[\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\hat{\vec{P}}_{\vec{k}} - i\omega_k \hat{\vec{Q}}_{\vec{k}})e^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\hat{\vec{P}}_{\vec{k}} + i\omega_k \hat{\vec{Q}}_{\vec{k}})e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right] =$$

$$= \sum_{k} \left[\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(e^{i\vec{k}\vec{r}} - e^{-i\vec{k}\vec{r}})\hat{\vec{P}}_{\vec{k}} - \frac{\omega_k}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}} \cdot (e^{i\vec{k}\vec{r}} + e^{-i\vec{k}\vec{r}})\hat{\vec{Q}}_{\vec{k}} \right] = \qquad (2.27)$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k}\left[ck\hat{\vec{Q}}_{\vec{k}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}) - \hat{\vec{P}}_{\vec{k}} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}) \right];$$

$$\hat{\vec{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \hat{\vec{A}}}{\partial t} = -\sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\vec{k}} \left(ck\hat{\vec{Q}}_{\vec{k}} \sin\vec{k}\vec{r} + \hat{\vec{P}}_{\vec{k}} \cos\vec{k}\vec{r} \right); \qquad (2.28)$$

$$\hat{\vec{H}} = \left[\vec{\nabla} \times \hat{\vec{A}}\right] = \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k}\left(ck\left[\vec{k} \times \hat{\vec{Q}}_{\vec{k}}\right]\sin(\vec{k}\vec{r}) + \left[\vec{k} \times \hat{\vec{P}}_{\vec{k}}\right]\cos(\vec{k}\vec{r}) \right). \qquad (2.29)$$

Гамільтоніан вільного електромагнітного поля, виходячи зі співвідношення (2.26):

$$\hat{\mathrm{H}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2}\left(\hat{P}^2_{\vec{k}} + \omega^2_k \hat{Q}^2_{\vec{k}} \right).$$

Тоді енергія вільного електромагнітного поля може бути подана як сума енергій незалежних квантових осциляторів, що відповідають окремим модам, кожна з яких визначається певними хвильовим вектором та поляризацією:

$$\varepsilon = \sum_{\vec{k},\alpha} \left(N_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k, \qquad (2.30)$$

де $\alpha = 1,2$ визначає поляризацію, $N_{k\alpha}$ – кількість елементарних збуджень, квантів поля або частинок (фотонів)[1] в моді $(\vec{k},\alpha)$. Можна переписати гамільтоніан поля $\hat{\mathrm{H}}$ як

$$\hat{\mathrm{H}} = \sum_{\vec{k},\alpha}\left(\hat{N}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k \ , \qquad (2.31)$$

де $\hat{N}_{\vec{k}\alpha}$ – оператор кількості частинок (фотонів). Власними станами оператора $\hat{N}_{\vec{k}\alpha}$ є стани моди поля, що визначаються кількістю фотонів, а власними значеннями – ці кількості:

$$\hat{N}_{\vec{k}\alpha}\left|N_{\vec{k}\alpha}\right\rangle = N_{\vec{k}\alpha}\left|N_{\vec{k}\alpha}\right\rangle. \qquad (2.32)$$

Введемо нові оператори $\hat{C}_{\vec{k}\alpha}$ та $\hat{C}^{+}_{\vec{k}\alpha}$ таким чином:

$$\begin{cases} \hat{C}_{\vec{k},\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}_k}(\omega_k\hat{Q}_{\vec{k}\alpha} + i\hat{P}_{\vec{k}\alpha}) \ ; \\ \hat{C}^{+}_{\vec{k},\alpha} = \dfrac{i\omega}{\sqrt{2\hbar\omega}_k}(\omega_k\hat{Q}_{\vec{k}\alpha} - i\hat{P}_{\vec{k}\alpha}) \ , \end{cases}$$

де $\hat{Q}_{\vec{k}\alpha}$ та $\hat{P}_{\vec{k}\alpha}$ – оператори модулів $\vec{Q}_{\vec{k}\alpha}$ та $\vec{P}_{\vec{k}\alpha}$. Оскільки виконується комутаційне співвідношення $\left[\hat{P}_{\vec{k}\alpha},\hat{Q}_{\vec{k}\alpha}\right] = \hat{P}_{\vec{k}\alpha}\hat{Q}_{\vec{k}\alpha} - \hat{Q}_{\vec{k}\alpha}\hat{P}_{\vec{k}\alpha} = -i\hbar$, то в результаті для певної моди поля (опускаючи відповідні індекси $\vec{k}$ та α) отримаємо:

[1] Термін “фотон” вперше застосував хімік Г.Льюіс (G.Lewes) у 1929 р.

$$\hat{C}\hat{C}^{+} = \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2 Q^2 - i\omega\hat{Q}\hat{P} + i\omega\hat{P}\hat{Q} + \hat{P}^2);$$

$$\hat{C}^{+}\hat{C} = \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{Q}^2 + i\omega\hat{Q}\hat{P} - i\omega\hat{P}\hat{Q} + \hat{P}^2); \qquad \Rightarrow \qquad (2.33)$$

$$\left[\hat{C}, \hat{C}^{+}\right] = \hat{C}\hat{C}^{+} - \hat{C}^{+}\hat{C} = \frac{i\hbar}{\hbar\omega}(\underbrace{-\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}}_{=-i\hbar}) = 1.$$

Як буде показано нижче, $\hat{C}$ і $\hat{C}^{+}$ є, відповідно, оператори знищення та народження фотона. Зі співвідношень (2.33) випливає, що

$$1 + 2\hat{C}^{+}\hat{C} = \frac{1}{\hbar\omega}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{Q}^2),$$

а отже

$$\frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{Q}^2) = \hbar\omega\left(\hat{C}^{+}\hat{C} + \frac{1}{2}\right).$$

А оскільки

$$\hat{\mathrm{H}} = \sum_{\vec{k},\alpha}\frac{1}{2}(\hat{P}_{\vec{k}}^2 + \omega_k^2\hat{Q}_{\vec{k}}^2) = \sum_{\vec{k},\alpha}\left(\hat{N}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k,$$

то в результаті отримаємо:

$$\hat{\mathrm{H}} = \sum_{\vec{k},\alpha}\left(\hat{C}_{\vec{k}\alpha}^{+}\hat{C}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k. \qquad (2.34)$$

З (2.34) випливає співвідношення, що зв'язує оператор кількості частинок з операторами народження й знищення фотонів:

$$\hat{N}_{\vec{k}\alpha} = \hat{C}_{\vec{k}\alpha}^{+}\hat{C}_{\vec{k}\alpha}. \qquad (2.35)$$

У стані електромагнітного поля $|N\rangle$ існує N фотонів. Подіємо оператором Гамільтона на стан поля $|N\rangle$. Отримаємо $\hat{\mathrm{H}}|N\rangle = E_N|N\rangle$. Подіємо на цю рівність зліва оператором $\hat{C}^{+}$ та використаємо співвідношення (2.34):

$$\hat{C}^{+}\left|\hbar\omega\left(\hat{C}^{+}\hat{C} + \frac{1}{2}\right)|N\rangle = E_N|N\rangle\right. \Rightarrow \hbar\omega(\hat{C}^{+}\hat{C}^{+}\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{C}^{+})|N\rangle = E_N\hat{C}^{+}|N\rangle.$$

Використовуючи комутаційне співвідношення $\hat{C}\hat{C}^{+} - \hat{C}^{+}\hat{C} = 1$, отримаємо:

$$\hbar\omega(\hat{C}^+\hat{C}\hat{C}^+ - \hat{C}^+ + \frac{1}{2}\hat{C}^+)\left|N\right\rangle = E_N\hat{C}^+\left|N\right\rangle; \quad \Rightarrow$$

$$\hbar\omega(\hat{C}^+\hat{C} + \frac{1}{2})\hat{C}^+\left|N\right\rangle = (E_N + \hbar\omega)\hat{C}^+\left|N\right\rangle. \qquad (2.36)$$

Отже, у результаті дії оператора $\hat{C}^+$ на стан $\left|N\right\rangle$ у виразі для енергії з'являється доданок $\hbar\omega$, що відповідає народженню частинки. Таким чином, оператор $\hat{C}^+$ є оператором народження фотона: $\hat{C}^+\left|N\right\rangle = C_N^+\left|N+1\right\rangle$ – відповідає збільшенню кількості фотонів в моді на 1. Аналогічно можна показати, що $\hat{C}$ є оператором знищення фотона, тобто: $\hat{C}\left|N\right\rangle = C_N\left|N-1\right\rangle$.

Знайдемо числа C_N та C_N^+. Виконаємо такі перетворення:

$$\underbrace{\left\langle N\left|\hat{C}^+\hat{C}\right|N\right\rangle}_{\equiv\left\langle N\left|\hat{N}\right|N\right\rangle = N \atop (2.32)} = \left\langle N\left|\hat{C}^+C_N\right|N-1\right\rangle = \left\langle N-1\left|C_N{}^+C_N\right|N-1\right\rangle =$$

$$= \left|C_N\right|^2\underbrace{\left\langle N-1\middle|N-1\right\rangle}_{=1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|C_N\right|^2 = N \quad \Rightarrow \quad C_N = \sqrt{N}e^{i\varphi}.$$

Вибираючи для визначеності фазу рівною 0, отримаємо:

$$\varphi = 0: \quad C_N = \sqrt{N} \quad \Rightarrow \quad \hat{C}\left|N\right\rangle = \sqrt{N}\left|N-1\right\rangle. \qquad (2.37)$$

Далі для оператора $\hat{C}^+$ отримаємо:

$$N = \left\langle N\left|\hat{C}^+\hat{C}\right|N\right\rangle = \sqrt{N}\left\langle N\left|\hat{C}^+\right|N-1\right\rangle = \sqrt{N}C_{N-1}^+\underbrace{\left\langle N\middle|N\right\rangle}_{=1} =$$

$$= \sqrt{N}C_{N-1}^+ \Rightarrow C_{N-1}^+ = \sqrt{N};\ C_N^+ = \sqrt{N+1},$$

а отже:

$$\hat{C}^+\left|N\right\rangle = \sqrt{N+1}\left|N+1\right\rangle. \qquad (2.38)$$

Перейдемо від класичних виразів для векторного потенціалу поля, напруженостей його електричної та магнітної складових до

відповідних операторів, які виразимо через оператори народження та знищення фотонів. Згадаємо класичні вирази для $\vec{A}$, $\vec{E}$ та $\vec{H}$:

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k},\alpha} (\vec{a}_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{a}^{*}_{\vec{k}\alpha} e^{-i\vec{k}\vec{r}});$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\sum_{\vec{k},\alpha} k(\vec{a}_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \vec{a}^{*}_{\vec{k}\alpha} e^{-i\vec{k}\vec{r}});$$

$$\vec{H} = rot\vec{A} = \left[\vec{k}\times\vec{A}\right] = i\sum_{\vec{k},\alpha} (\left[\vec{k}\times\vec{a}_{\vec{k}\alpha}\right] e^{i\vec{k}\vec{r}} - \left[\vec{k}\times\vec{a}^{*}_{\vec{k}\alpha}\right] e^{-i\vec{k}\vec{r}}).$$

Далі перейдемо до операторів: $\vec{a} \to \hat{\vec{a}}$; $\vec{A}, \vec{E}, \vec{H} \to \hat{\vec{A}}, \hat{\vec{E}}, \hat{\vec{H}}$:

$$\hat{\vec{a}}_{\vec{k}\alpha} = \hat{a}_{\vec{k}\alpha}\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\alpha}, \text{ де } \vec{a}_{\vec{k}\alpha} \perp \vec{k}; \qquad \hat{\vec{a}}^{+}_{\vec{k}\alpha} = \hat{a}^{+}_{\vec{k}\alpha}\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\alpha},$$

де $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\alpha}$ – вектор поляризації. У результаті отримаємо:

$$\hat{\vec{A}} = \sum_{\vec{k},\alpha} \vec{\varepsilon}_{\vec{k}\alpha} (\hat{a}_{\vec{k}\alpha} e^{i\beta_{\vec{k}}} + \hat{a}^{+}_{\vec{k}\alpha} e^{-i\beta_{\vec{k}}});$$

$$\hat{\vec{E}} = i\sum_{\vec{k},\alpha} k\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\alpha} (\hat{a}_{\vec{k}\alpha} e^{i\beta_{\vec{k}}} - \hat{a}^{+}_{\vec{k}\alpha} e^{i\beta_{\vec{k}}}); \qquad (2.39)$$

$$\hat{\vec{H}} = i\sum_{\vec{k},\alpha} \left[\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{k\alpha}\right] (\hat{a}_{k\alpha} e^{i\beta} - \hat{a}^{+}_{k\alpha} e^{-i\beta}),$$

де $\beta_{\vec{k}} = \vec{k}\vec{r}$.

Оператори знищення й народження зв'язані з операторами узагальнених координат та імпульсів такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} \hat{C} = \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{Q} + i\hat{P}), \\ \hat{C}^{+} = \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{Q} - i\hat{P}). \end{cases} \qquad (2.40)$$

У свою чергу вектори $\vec{a}$ виражаються через вектори $\vec{Q}$ і $\vec{P}$ таким чином:

$$\vec{a} = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}} (\vec{p} - i\omega\cdot\vec{Q}). \qquad (2.41)$$

А отже:

$$\begin{cases} \hat{a} = \dfrac{i}{k}\sqrt{\dfrac{\pi}{V}}(\hat{P} - i\omega\hat{Q}) = \dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{\pi}{V}}(\omega\hat{Q} + i\hat{P}) = \\ = \dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{\pi}{V}}\sqrt{2\hbar\omega}\,\dfrac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\cdot\hat{Q} + i\hat{p}) \Rightarrow \hat{a} = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar\omega}{V}}\,\dfrac{1}{k}\hat{C}; \\ \hat{a}^{+} = -\dfrac{i}{k}\sqrt{\dfrac{\pi}{V}}(\hat{P} + i\omega\hat{Q}) = \dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{\pi}{V}}(\omega\hat{Q} - i\hat{P}) = \ldots = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar\omega}{V}}\,\dfrac{1}{k}\hat{C}^{+}. \end{cases}$$

Отже звідси маємо:

$$\begin{cases} \hat{a}^{+} = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar\omega}{V}}\,\dfrac{1}{k}\hat{C}^{+}; \\ \hat{a} = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar\omega}{V}}\,\dfrac{1}{k}\hat{C}. \end{cases} \qquad (2.42)$$

Остаточно отримаємо вирази для операторів $\hat{\vec{A}}$, $\hat{\vec{E}}$ та $\hat{\vec{H}}$ через оператори народження та знищення фотонів:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{A}} &= \sum_{\vec{k},\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\,\frac{\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\alpha}}{k}(\hat{C}_{\vec{k}\alpha}e^{i\beta_{\vec{k}}} - \hat{C}^{+}_{\vec{k}\alpha}e^{-i\beta_{\vec{k}}}); \\ \hat{\vec{E}} &= i\sum_{\vec{k},\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\,\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\alpha}(\hat{C}_{\vec{k}\alpha}e^{i\beta_{\vec{k}}} - \hat{C}^{+}_{\vec{k}\alpha}e^{-i\beta_{\vec{k}}}); \qquad (2.43) \\ \hat{\vec{H}} &= i\sum_{\vec{k},\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\left[\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\alpha}\right](\hat{C}_{\vec{k}\alpha}e^{i\beta_{\vec{k}}} - \hat{C}^{+}_{\vec{k}\alpha}e^{-i\beta_{\vec{k}}}). \end{aligned}$$

<u>Фотонний газ (рівноважний фотонний газ)</u>

Електромагнітне поле можна розглядати як газ, що складається з вільних частинок-бозонів (фотонів). Дійсно, фотони не взаємодіють між собою: один потік фотонів вільно проходить через інші. Рівновага у фотонному газі встановлюється лише завдяки наявності інших частинок, при взаємодії з якими фотони народжуються або знищуються (приклад: встановлення рівноваги між випромінюванням та речовиною в порожнині). Розглянемо спектральну густину енергії рівноважного

електромагнітного випромінювання $w(\omega)=\dfrac{d\varepsilon}{d\omega}$ деякій порожнині в розрахунку на одиницю об'єму:

$$w(\omega)=\frac{\rho(\omega)n(\omega)\hbar\omega}{V}, \tag{2.44}$$

де $\rho(\omega)$ – спектральна густина, $n(\omega)$ – число заповнення (середня кількість частинок в стані з енергією $\hbar\omega$):

$$n(E)=\frac{1}{e^{(E-\mu)/kT}-1}. \tag{2.45}$$

Оскільки фотони можуть народжуватись і знищуватись в різних квантових станах без порушення рівноважності фотонного газу (кількість частинок газу не зберігається $dN\neq 0$). Отже у стані рівноваги для фотонного газу маємо $\mu dN=0$, а оскільки $dN\neq 0$, то $\mu=0$. Отже, фотонний газ – це квантово вироджена система, для якої принципово неможливе існування в невиродженому стані, оскільки умова невиродженості $e^{-\frac{\mu}{kT}}>>1$ не може бути виконана при $\mu=0$.

$$E=\hbar\omega \;\Rightarrow\; n(\omega)=\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1};\quad \rho(\omega)=\frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}.$$

Підставивши це в (2.44), отримаємо добре відому формулу Планка:

$$w(\omega)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}\ . \tag{2.46)}$$

Відповідний планківський розподіл зображено на рис. 2.2.

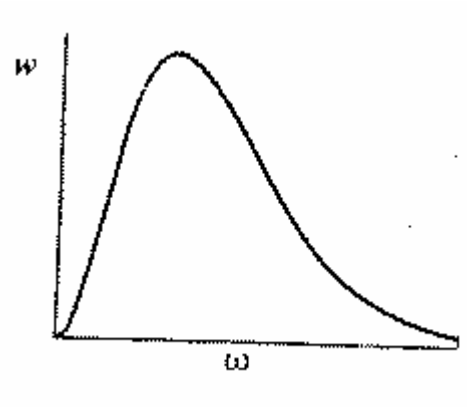


Рис. 2.2

Для рівноважного теплового електромагнітного випромінювання (фотонного газу) відомі такі формули і закони, що описують його властивості.

1. Формула Релея-Джинса (1900 р.).

При $\hbar\omega << kT$ (область низьких частот або високих температур):

$$w(\omega, T) \approx \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \text{ , а отже}$$

$$w(\omega) \sim \omega^2. \qquad (2.47)$$

2. Закон випромінювання Віна (1896 р.). З іншого боку, при $\hbar\omega >> kT$ (область високих частот або низьких температур):

$$w(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/kT} \text{ , а отже}$$

$$w(\omega) \sim e^{-\hbar\omega/kT}. \qquad (2.48)$$

3. Закон зміщення Віна (1893 р.).

При збільшенні температури максимум планківського розподілу зміщується в область вищих енергій за законом:

$$\lambda_{\max} T = b = 0,29 \text{ см} \cdot \text{К}.$$

4. Закон Стефана-Больцмана (1879 р.).

Об’ємна густина енергії фотонного газу:

$$W = \int_0^\infty w(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \left[\frac{\hbar\omega}{kT} = x \right] =$$

$$= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{=\frac{\pi^4}{15}} = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} T^4 = \sigma T^4, \qquad (2.49)$$

де $\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3}$ – стала Стефана-Больцмана.

РОЗДІЛ 3: Взаємодія фотонів з речовиною

Розглянемо речовину у зовнішньому електромагнітному полі. Гамільтоніан системи поле + речовина:

$$\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{H}}_{at} + \hat{\mathrm{H}}_{f} + \hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{int}} \ , \tag{3.1}$$

де $\hat{\mathrm{H}}_{at}$ – гамільтоніан атома, $\hat{\mathrm{H}}_{f}$ – гамільтоніан поля, $\hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{int}}$ – оператор взаємодії поля з речовиною. Як було показано в попередньому розділі, в термінах методу вторинного квантування гамільтоніан поля визначається таким співвідношенням:

$$\hat{\mathrm{H}}_{f} = \sum_{\vec{k},\alpha} \hbar\omega_k (\hat{C}^{+}_{k\alpha}\hat{C}_{k\alpha} + \frac{1}{2}) \ . \tag{3.2}$$

Тепер нашою задачею буде записати гамільтоніан атома та оператор взаємодії у рамках методу вторинного квантування.

Атом. Розглянемо спочатку атом. Нехай $|i\rangle$ – стан атома. Тоді $\hat{\mathrm{H}}_{at}|i\rangle = \hbar\omega_i|i\rangle$, де $E_i = \hbar\omega_i$ – енергія атома у стані $|i\rangle$. Для стану $|i\rangle$ можна записати:

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \, . \tag{3.3}$$

Доведемо це.

$\langle j|\sum_i |i\rangle\langle i|j\rangle (=)$

Система власних функцій – ортонормована, тобто:

$$\langle i|j\rangle = \int \psi_i^* \psi_j d^3r = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j. \end{cases}$$

Отже отримаємо:

$$(=)\underbrace{\langle j|j\rangle}_{=1}\underbrace{\langle j|j\rangle}_{=1} = 1 = \langle j|j\rangle = \langle j|1|j\rangle \Rightarrow \sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \ .$$

Виконаємо деякі перетворення з гамільтоніаном атома.

$$\hat{\mathrm{H}}_{at} = \sum_i |i\rangle\langle i|\hat{H}_{at}\sum_j |j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} |i\rangle\langle i|\hat{\mathrm{H}}_{at}|j\rangle\langle j| \ , \text{ де}$$

$\langle i|\hat{\mathrm{H}}_{at}|j\rangle = \langle i|\hbar\omega_j|j\rangle = \hbar\omega_j\langle i|j\rangle = \hbar\omega_j\delta_{ij} = \hbar\omega_i$, а отже,

$$\hat{\mathrm{H}}_{at} = \sum_{i,j} \hbar\omega_j \delta_{ij} |i\rangle\langle j| = \sum_i \hbar\omega_i |i\rangle\langle i| \ . \qquad (3.4)$$

Подіємо оператором $|i\rangle\langle j|$ на деякий стан атома $|l\rangle$: $|i\rangle\langle j|l\rangle = \delta_{jl}|i\rangle$. Видно, що цей оператор, діючи на стан, знищує його, а отже, оператор $|i\rangle\langle j|$ одночасно народжує стан $|i\rangle$ та знищує стан $|j\rangle$: $|i\rangle\langle j|j\rangle = |i\rangle$. Тому його зручно записати у вигляді:

$$|i\rangle\langle j| = \hat{b}_i^{\,+}\hat{b}_j \ . \qquad (3.5)$$

Отже $\hat{b}_i^{\,+}$ та $\hat{b}_j$ – оператори народження і знищення відповідних станів атома (вони завжди стоять парою, оскільки при знищенні одного стану завжди народжується інший). Таким чином, оскільки $|i\rangle\langle i| = \hat{b}_i^{+}\hat{b}_i$, то, підставляючи цей вираз у (3.4), отримуємо вираз для гамільтоніана атома в термінах методу вторинного квантування:

$$\hat{\mathrm{H}}_{at} = \sum_i \hbar\omega_i \hat{b}_i^{+}\hat{b}_i \ . \qquad (3.6)$$

<u>Оператор взаємодії поля з речовиною</u>

В рамках дипольного наближення оператор взаємодії атома з полем записується так:

$$\hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{int}} = \sum_i e\vec{r}_i \vec{E}(=)$$

У довгохвильовому наближенні, яке добре працює в оптичному діапазоні, $\vec{E}$ є постійним на відстанях порядку розміру атома.

$$r_{at} \sim 1\text{Å} = 10^{-10}\ м;$$

$$\lambda \sim 0{,}5\ \text{мкм} \sim 0{,}5\cdot 10^{-6}\ м.$$

А отже, можемо записати:

$$(=)\, e\vec{E}\sum_i \vec{r}_i = e\vec{E}\vec{D} \ ,$$

де введено позначення $\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i$. Як було показано в попередньому розділі, напруженість електричної складової поля

$$\vec{E} = i\sum_{\vec{k}}\left(\frac{2\pi\cdot\hbar\omega_k}{V}\right)^{1/2}\vec{\varepsilon}_{k\alpha}\left(\hat{C}_{k\alpha}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega\cdot t)} - \hat{C}^{+}_{k\alpha}e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega\cdot t)}\right)(\approx)$$

Оскільки $kr = \frac{2\pi}{\lambda}r$ – мала величина, то $e^{i\vec{k}\vec{r}} \approx 1 + \vec{k}\vec{r} + \ldots$, тоді для дипольних переходів в довгохвильовому наближенні $e^{i\vec{k}\vec{r}} \approx 1$, а отже

$$(\approx) i\sum_{\vec{k},\alpha}\left(\frac{2\pi\cdot\hbar\omega_k}{V}\right)^{1/2}\vec{\varepsilon}_{k\alpha}\left(\hat{C}_{k\alpha}e^{-i\omega_k t} - \hat{C}^{+}_{k\alpha}e^{i\omega_k t}\right). \qquad (3.7)$$

Отже вектор $\vec{E}$ записано через оператори знищення і народження станів електромагнітного поля. Тепер запишемо вектор $\vec{D}$ через оператори знищення і народження атомних станів. Для цього виконаємо такі перетворення:

$$\vec{D} = \sum_i |i\rangle\langle i|\vec{D}\sum_j |j\rangle\langle j| = \sum_{i,j}\vec{D}_{ij}|i\rangle\langle j| = \sum_{ij}\vec{D}_{ij}\hat{b}_i^{+}\hat{b}_j \ , \qquad (3.8)$$

де $\langle i|\vec{D}|j\rangle = \int \psi_i^{*}\vec{D}\psi_j d^3r = \vec{D}_{ij}$.

Отже, в термінах методу вторинного квантування оператор взаємодії поля з атомом можна подати у вигляді:

$$\hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{int}} = ie\sum_{\vec{k},\alpha}\sum_{i,j}\left(\frac{2\pi\cdot\hbar\omega_k}{V}\right)^{1/2}(\vec{\varepsilon}_{k\alpha}\vec{D}_{ij})(\hat{C}_{k\alpha}e^{-i\omega_k t} - \hat{C}^{+}_{k\alpha}e^{\omega_k t})\hat{b}_i^{+}\hat{b}_j \ . \qquad (3.9)$$

Розглянемо найпростішу модель енергетичного спектру атома – дворівневу:

$|2\rangle$ ————————

$|1\rangle$ ————————

Розглянемо можливі переходи між цими рівнями. Імовірність переходу визначається виразом:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{12}|^2\delta(E_2 - E_1) \ , \qquad (3.10)$$

де V_{12} – матричний елемент оператора збурення. Якщо ψ_1 і ψ_2 – хвильові функції незбуреного атома, то відповідний матричний елемент:

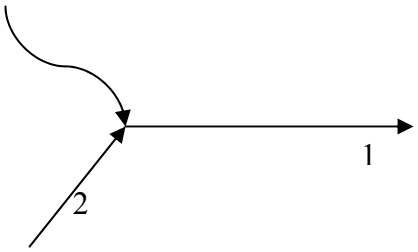
$$V_{12} = \int \psi_1^* \hat{V} \psi_2 d^3 r \ , \ \text{де} \ \ \hat{\mathrm{H}}_{at} \psi_i = \varepsilon_i \psi_i . \qquad (3.11)$$

Оператор взаємодії, що враховує і поглинальні, і випромінювальні переходи, має вигляд:

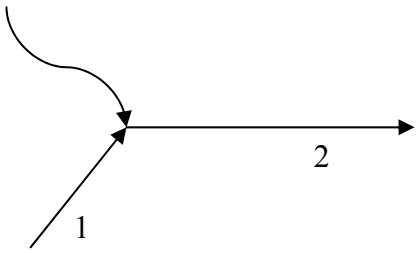
$$\hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{int}} = ie \sum_{\vec{k},\alpha} \left(\frac{2\pi \cdot \hbar \omega_k}{V} \right)^{1/2} (\vec{\varepsilon}_{k\alpha} \vec{D}_{12})(\hat{C}_{k\alpha} e^{-i\omega_k t} - \hat{C}_{k\alpha}^{+} e^{i\omega_k t})(\hat{b}_1^{+} \hat{b}_2 + \hat{b}_2^{+} \hat{b}_1) \ , \qquad (3.12)$$

тут використано, що $\vec{D}_{12} = \vec{D}_{21}$, коли хвильові функції – дійсні. Кожен з чотирьох доданків в (3.12) описує певний акт взаємодії атома з полем, який може бути унаочнений відповідною діаграмою Фейнмана. Розглянемо послідовно всі чотири доданки.

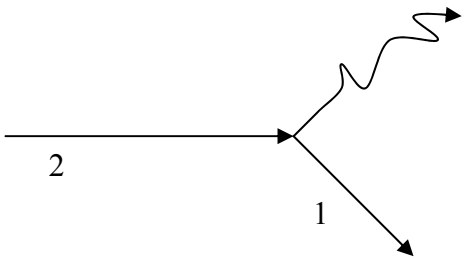
1. Член $\hat{C}_{k\alpha} \hat{b}_1^{+} \hat{b}_2$ описує знищення стану 2 атома і народження стану 1 при одночасному знищенні фотона. Такі переходи неможливі за законом збереження енергії, оскільки одночасно повинна зменшитись енергія атома і поля.



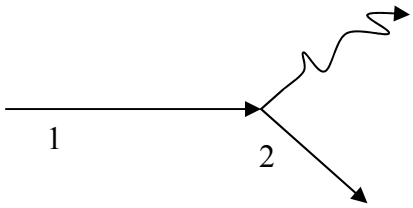
2. Член $\hat{C}_{k\alpha} \hat{b}_2^{+} \hat{b}_1$ відповідає поглинанню фотона атомом. Енергія системи атом-поле не змінюється.



3. Член $\hat{C}_{k\alpha}^{+}\hat{b}_1^{+}\hat{b}_2$ також описує можливі переходи. Вони відповідають випромінюванню фотона.



4. Процес, що відповідає члену $\hat{C}_{k\alpha}^{+}\,\hat{b}_2^{+}\hat{b}_1$ неможливий за законом збереження енергії, оскільки знищення стану 1 атома і народження стану 2 приведе до збільшення енергії системи атом+поле.



Знайдемо ймовірності процесів поглинання і випромінювання фотона атомом.

1. Імовірність переходів $1 \to 2$, тобто поглинальних переходів:

$$W_{1\to 2} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle n_{k\alpha}-1,2\left|\hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{int}}^{abs}\right|n_{k\alpha},1\right\rangle\right|^2 \delta(\varepsilon_2-\varepsilon_1-\hbar\omega_k)\,, \quad (3.13)$$

де $\left|n_{k\alpha},1\right\rangle$ – початковий стан системи, що відповідає стану $\left|1\right\rangle$ атома та стану поля, що відповідає $\left|n_{k\alpha}\right\rangle$ фотонів у даній моді. Матричний елемент переходу з поглинанням фотона можна відповідно до (3.12) подати у вигляді:

$$\left\langle n_{k\alpha}-1,2\left|\hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{abs}}\right|n_{k\alpha},1\right\rangle = i\hbar\cdot g_{k\alpha}e^{-i\omega_k t}\left\langle n_{k\alpha}-1,2\left|\hat{C}\hat{b}_2^{+}b_1\right|n_{k\alpha},1\right\rangle\,, \quad (3.14)$$

де $g_{k\alpha}$ – деяка константа, а

$$\left\langle n_{k\alpha}-1,2\left|\hat{C}_{k\alpha}\hat{b}_2^{+}b_1\right|n_{k\alpha},1\right\rangle=\left\langle n_{k\alpha}-1,2\left|\hat{C}_{k\alpha}\right|n_{k\alpha},2\right\rangle=$$

$$=\sqrt{n_{k\alpha}}\left\langle n_{k\alpha}-1,2\left|n_{k\alpha}-1,2\right.\right\rangle=\sqrt{n_{k\alpha}}\ ,$$

оскільки $\left\langle n_{k\alpha}-1,2\left|n_{k\alpha}-1,2\right.\right\rangle=1$ – нормовочний інтеграл. Отже, шукана ймовірність поглинального переходу:

$$W_{1\to 2}=2\pi\hbar g_{k\alpha}^2 n_{k\alpha}\delta(\varepsilon_2-\varepsilon_1-\hbar\omega_k)\,. \qquad (3.15)$$

Таким чином, ймовірність поглинальних переходів пропорційна кількості фотонів, що зумовлюють ці переходи: $W_{1\to 2}\sim n$, тобто поглинальні переходи є вимушеними електромагнітним полем (наявністю фотонів).

2. Імовірність переходів $2\to 1$, тобто випромінювальних переходів:

$$W_{2\to 1}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle n_{k\alpha}+1,1\left|\hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{int}}^{em}\right|n_{k\alpha},2\right\rangle\right|^2\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\hbar\omega_k)\,, \qquad (3.16)$$

де $\left|n_{k\alpha},2\right\rangle$ – початковий стан системи, що відповідає стану $\left|2\right\rangle$ атома та стану поля, що відповідає $\left|n_{k\alpha}\right\rangle$ фотонів у даній моді. Матричний елемент переходу можна подати так:

$$\left\langle n_{k\alpha}+1,1\left|\hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{em}}\right|n_{k\alpha},2\right\rangle=i\hbar\cdot g_{k\alpha}e^{-i\omega_k t}\left\langle n_{k\alpha}+1,1\left|\hat{C}_{k\alpha}^{+}\hat{b}_1^{+}b_2\right|n_{k\alpha},2\right\rangle\ , \qquad (3.17)$$

де

$$\left\langle n_{k\alpha}+1,1\left|\hat{C}_{k\alpha}^{+}\hat{b}_1^{+}b_2\right|n_{k\alpha},2\right\rangle=\left\langle n_{k\alpha}+1,1\left|\hat{C}_{k\alpha}^{+}\right|n_{k\alpha},1\right\rangle=$$

$$=\sqrt{n_{k\alpha}+1}\left\langle n_{k\alpha}+1,1\left|n_{k\alpha}+1,1\right.\right\rangle=\sqrt{n_{k\alpha}+1}\ ,$$

оскільки $\left\langle n_{k\alpha}+1,1\left|n_{k\alpha}+1,1\right.\right\rangle$ – нормовочний інтеграл. Отже, шукана ймовірність випромінювального переходу:

$$\begin{aligned}W_{2\to 1}&=2\pi\hbar g_{k\alpha}^2(n_{k\alpha}+1)\delta(\varepsilon_1+\hbar\omega_k-\varepsilon_2)=\\&=2\pi\hbar g_{k\alpha}^2 n_{k\alpha}\delta(\varepsilon_1+\hbar\omega_k-\varepsilon_2)+2\pi\hbar g_{k\alpha}^2\delta(\varepsilon_1+\hbar\omega_k-\varepsilon_2)\ ,\end{aligned} \qquad (3.18)$$

звідки видно, що ймовірність вимушених переходів (перший член у (3.18)) пропорційна кількості фотонів в моді, в той час як ймовірність спонтанних переходів (другий член у (3.18)) – постійна величина. Отже, імовірність випромінювальних переходів: $W_{2\to 1}\sim n+1$. Отже, на відміну від поглинальних, випромінювальні переходи можуть бути як вимушеними, ймовірність яких залежить від кількості фотонів), так і

спонтанними, які відбуваються без наявності фотонів у моді поля. Оскільки при вимушеному випромінюванні зростає число заповнення тієї самої моди поля, взаємодія з якою стимулювала перехід, то народжений фотон є повністю ідентичним тому, що викликав цей перехід, тобто він має ті самі енергію, напрям поширення, поляризацію.

Коефіцієнти Айнштайна

Ще до створення квантової механіки Альберт Айнштайн вперше звернув увагу на те, що якщо вплив електромагнітного поля на сукупність атомів обмежити лише вимушеними (або, як ще кажуть, *індукованими*) поглинальними переходами, то при спробі розглянути сукупність атомів, що репрезентують речовину, яка знаходиться в рівновазі з випромінюванням, для спектральної густини випромінювання виходить формула Віна (2.48), а не формула Планка, яка на той момент здобула беззаперечне визнання. Айнштайн висунув припущення про існування поряд із спонтанними переходами із збудженого стану в основний також *вимушених переходів з випромінюванням*, які відбуваються як і вимушені переходи з поглинанням лише при наявності електромагнітного поля на частоті переходу між рівнями E_1 та E_2.

Айнштайн застосував до розгляду взаємодії атомів з випромінюванням принцип *детальної рівноваги* (його іноді називають принципом мікроскопічної оборотності). Відповідно до цього принципу при термодинамічній рівновазі кожному мікроскопічному процесу можна поставити у відповідність точно такий самий процес, що йде в зворотному напрямку, причому кількість і перших і других процесів в одиницю часу повинна бути однакова.

Нехай маємо сукупність N дворівневих атомів, що знаходяться в термодинамічній рівновазі з випромінюванням. Нехай ймовірність спонтанних (***sp****ontaneous*) переходів з випусканням (***em****ission*) $W_{em}^{sp} = a_{12}$. Імовірність вимушених (***st****imulated*) переходів (як поглинальних, так і випромінювальних) пропорційна спектральній густині випромінювання, оскільки $n \sim I \sim \rho(\omega)$. Отже, ймовірність вимушених переходів з випусканням з рівня 2 на рівень 1 є $W_{em}^{stim} = b_{12}\rho(\omega)$, а ймовірність поглинальних переходів - $W_{abs}^{stim} = b_{21}\rho(\omega)$. Коефіцієнти a_{12}, b_{12}, b_{21} називаються коефіцієнтами Айнштайна. Кількість переходів з рівня 2 на рівень 1 за

одиницю часу $\frac{dN_2}{dt} = N_2(W_{em}^{sp} + W_{em}^{stim})$, а з рівня 1 на рівень 2 $\frac{dN_1}{dt} = N_1 W_{abs}$. Якщо в системі існує термодинамічна рівновага, то

$$N_1 b_{21}\rho(\omega) = N_2(a_{12} + b_{12}\rho(\omega)) \ , \tag{3.19}$$

де спектральна густина при термодинамічній рівновазі є також функцією температури: $\rho(\omega, T)$. Згідно з розподілом Больцмана: $N_i = const \cdot g_i e^{-E_i/kT}$, де g_i – кратність виродження (кількість станів, що відповідають даному енергетичному рівню). В результаті отримаємо:

$$e^{-E_1/kT} g_1 b_{21}\rho(\omega, T) = g_2(a_{12} + b_{12}\rho(\omega, T))e^{-E_2/kT} \ . \tag{3.20}$$

Якщо $T \to \infty$, то також $\rho \to \infty$. Отже, з (3.21) отримаємо:

$$g_1 b_{21} = g_2 b_{21} \ . \tag{3.21}$$

Тоді з урахуванням $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ (3.20) можна переписати так

$$g_2 b_{21}\rho(\omega, T) = [g_2 a_{12} + g_2 b_{12}\rho(\omega)]e^{-\hbar\omega/kT} \tag{3.22}$$

$$\rho(\omega, T) = \frac{a_{12}}{b_{12}} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{3.23}$$

При високих температурах і малих частотах ($kT >> \hbar\omega$) (3.23) переходить в

$$\rho(\omega, T) = \frac{a_{12}}{b_{12}} \frac{kT}{\hbar\omega} \ . \tag{3.24}$$

З іншого боку при $kT >> \hbar\omega$ справедлива формула Релея-Джинса

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^3} kT \ . \tag{3.25}$$

З порівняння двох останніх формул знаходимо зв'язок між коефіцієнтами Айнштайна для спонтанних та вимушених переходів:

$$\frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^3} \ . \tag{3.26}$$

Це надзвичайно важливий результат, який самим безпосереднім чином вплинув (і продовжує впливати) на розвиток квантової електроніки

взагалі та на створення лазерів зокрема. Чим вища бажана частота генерації (менша довжина хвилі), тим складніше створити і підтримувати інверсну заселеність верхнього лазерного рівня внаслідок конкуренції небажаних в цій ситуації спонтанних переходів з вимушеними переходами, що дають внесок у когерентне направлене випромінювання лазера, оскільки ймовірність спонтанних переходів ~ ω^3. Тому спочатку було побудовано мазери, потім лазери у видимому та ІЧ діапазонах, а потім поступово вони поширились на УФ, рентгенівський та γ-діапазони. (Для створення інверсної заселеності в γ-лазерах навіть використовували невеликий ядерний вибух). Одним з проривів на шляху створення лазерів було запровадження так званих відкритих резонаторів (А.М.Прохоров, 1958 та Діке, Шавлов і Таунс), наприклад, у вигляді двох паралельних дзеркал, що мають більш розріджений спектр і дозволяють подолати проблему створення необхідної інверсної заселеності.

З порівняння рівностей (3.23) та (3.25) можна дістати вираз для спектральної густини випромінювання

$$\rho(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^2}{8\pi^3c^3}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}, \qquad (3.27)$$

який є не чим іншим, як формулою Планка. Ще раз підкреслимо, що до такої спектральної густини можна прийти лише припустивши існування спонтанних переходів. Зауважимо, що всі ці висновки ґрунтуються на загальних положеннях термодинаміки і тому мають універсальний характер: вони справедливі незалежно від конкретного походження енергетичних рівнів і конкретної квантової системи.

Комбінаційне розсіяння світла

Розглянемо процес випромінювання стоксового фотона, зображений на рис.3.1. При віртуальному переході із основного стану молекули вгору зникає фотон лазерного випромінювання, а при поверненні молекули на перший збуджений коливальний стан виникає стоксовий фотон, енергія якого менша за енергію лазерного фотона на величину коливального кванта.

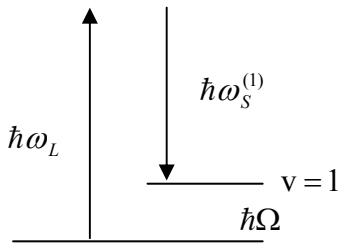


Рис. 3.1.

Імовірність такого переходу пропорційна квадрату матричного елемента переходу між початковим та кінцевим станами системи речовина-поле.

Початковий стан системи, записаний у представленні чисел заповнення є $\left|n_L, n_S, 0\right\rangle$, де n_L - середня кількість фотонів в деякій моді лазерного випромінювання, n_S - середня кількість фотонів у деякій моді розсіяного стоксового випромінювання, а кількість збуджених коливальних станів з $v = 1$ дорівнює нулю (відсутні коливальні збудження молекул). Кінцевий стан системи, записаний у представленні чисел заповнення є $\left\langle 1, n_S + 1, n_L - 1\right|$, тобто в результаті акту стоксового розсіяння зникає один квант поля лазерного випромінювання, а натомість народжується один квант розсіяного стоксового випромінювання та один квант коливального збудження молекули. При цьому повна енергія системи речовина-поле не змінюється, в той час як енергія електромагнітного поля зменшується, а енергія речовини (ансамблю молекул) – збільшується на ту саму величину. Тепер можна записати вигляд оператора збурення, який переводить початковий стан системи в кінцевий:

$$\hat{C}_L \hat{C}_S^+ \hat{C}_V^+, \tag{3.28}$$

де $\hat{a}_L$ - оператор знищення лазерних фотонів, $\hat{a}_S^+$ - оператор народження стоксових фотонів, $\hat{a}_V^+$ - оператор народження коливальних збуджень молекули. Ці оператори діють лише на "свої" стани за відомими правилами $\hat{C}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$ та $\hat{C}^+\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$, з яких

зрозуміло походження назв цих операторів. Отже ймовірність випускання стоксового фотона

$$W_{\text{випускання}} \sim \left| \left\langle 1, n_S + 1, n_L - 1 \right| \hat{C}_L \hat{C}_S^{+} \hat{C}_V^{+} \left| n_L, n_S, 0 \right\rangle \right|^2 = n_L (n_S + 1) \,. \quad (3.29)$$

Зворотний процес, в якому зникають один фотон стоксового випромінювання і один квант коливального збудження молекули і народжується один фотон лазерного випромінювання, має ймовірність

$$W_{\text{зникнення}} \sim \left| \left\langle 0, n_S - 1, n_L + 1 \right| \hat{C}_L^{+} \hat{C}_S \hat{C}_V \left| n_L, n_S, 1 \right\rangle \right|^2 = (n_L + 1) n_S \,. \quad (3.30)$$

Тепер розглянемо процес комбінаційного розсіяння в одну моду стоксового випромінювання з частотою ω_S при частоті падаючого лазерного світла ω_L. Число заповнення в цій моді n_S визначається конкуренцією процесів випускання і зникнення стоксових фотонів і дається рівнянням

$$\frac{dn_S}{dt} = DP(0) n_L (n_S + 1) - DP(1) n_S (n_L + 1) \,, \quad (3.31)$$

де D – константа; P(0) та P(1) – ймовірності знаходження молекули в станах з коливальним числом v = 0 та v = 1. Цілком очевидно, що

$$\frac{dn_S}{dt} = -\frac{dn_L}{dt} \,. \quad (3.32)$$

Підкреслимо, що ці рівняння описують процес стоксового розсіяння при будь-яких числах заповнення.

При $n_S << 1$ маємо звичайне або *спонтанне* (на відміну від вимушеного) **КРС**.

Рівняння (А) в цьому випадку набирає вигляду

$$\frac{dn_S}{dt} = DP(0) n_L \,, \quad (3.33)$$

тобто швидкість генерації стоксових фотонів в деякій моді пропорційна кількості фотонів падаючого лазерного випромінювання і не залежить від кількості стоксових фотонів в цій моді. Густина потоку фотонів падаючого лазерного випромінювання зменшується по мірі проходження лазерного світла через речовину. Дійсно, при поширенні лазерного пучка вздовж осі z маємо

$$\frac{dn_L}{dz} = \frac{dn_L}{dt}\frac{dt}{dz} = -\frac{dn_S}{dt}\frac{n}{c} = -\frac{n}{c} DP(0) n_L \,,$$

звідки

$$n_L(z) = n_L(0) e^{-\beta Z} \,, \quad (3.34)$$

де $\beta = -\frac{n}{c} DP(0)$, а n – показник заломлення на частоті лазерного світла. При цьому розмірність $\beta = \left[\frac{1}{L}\right] =$ см$^{-1}$.

Нагадаємо, що все це отримано для розсіяння лише в одну моду, ймовірність якого визначає величина β. З іншого боку зменшення густини n_L [1/см^2] потоку лазерних фотонів при його проходженні шляху dz пропорційне як самій густині потоку n_L, так і об'єму, в якому відбувається розсіяння, $dV =$ 1см$^2 \times dz$, помноженому на σ - поперечний переріз стоксового розсіяння одного лазерного фотона *розрахований на одиницю об'єму речовини:*

$$dn_L = - n_L \, \sigma dz \,, \tag{3.35}$$

звідки отримаємо

$$n_L(z) = n_L(0) e^{-\sigma Z} \,. \tag{3.36}$$

Таким чином, для стоксового розсіяння в одну моду $\sigma = \beta$.

В експериментах розсіяння відбувається не в одну стоксову моду, а в сукупність стоксових мод, частоти яких лежать в межах природної ширини стоксової лінії $\Delta\nu$, ($\Delta\nu = \frac{1}{\tau_v}$, де τ_v - час життя збудженого коливального стану молекули, типово $\tau_v = 10^{-10}$ -10^{-11} с, оскільки експериментально виміряна ширина лінії $\Delta\tilde{\nu} = 1 \div 10$ см$^{-1}$). Щоб отримати поперечний переріз стоксового розсіяння одного лазерного фотона σ, розрахований на одиницю об'єму речовини величину β для однієї моди множать на кількість таких мод: $\sigma = \beta\left(\frac{8\pi\nu_S^2 n'}{c^3}\Delta\nu V\right)$, де V – об'єм, в якому відбувається розсіяння, n' – показник заломлення на стоксовій частоті.

При $n_S >> 1$ маємо вимушене КРС (співвідношення $n_L >> 1$ виконується завжди**).**

Явище ВКР вперше в 1962 р. випадково спостерігали Вудбері та Нг при роботі лазера на рубіні, в резонаторі якого знаходилась кювета з нітробензолом $C_6H_5NO_2$. (В той час для отримання гігантських імпульсів методом активної модуляції добротності використовували комірки Кера з нітробензолом). Крім лазерного випромінювання на

λ=694,3 нм з резонатора виходило потужне випромінювання на λ=767,0 нм, тобто зсунуте по частоті відносно лазерного випромінювання на величину $\Delta\tilde{\nu} =$ 1345 см$^{-1}$. Цей зсув відповідає частоті моди внутрішньомолекулярних коливань молекули нітробензола, що дає найпотужнішу лінію в спектрі КРС. Коли в резонатор вміщували інші рідини, то спостерігалось подібне додаткове випромінювання на інших довжинах хвиль (Вудбері та Екхард), але кожного разу частотний зсув дорівнював частоті внутрішньомолекулярного коливання, що спостерігається в спектрі КРС.

Таким чином, явище ВКР (Stimulated Raman Scattering) схоже на КРС (Raman Scattering), але має ряд суттєвих відмінностей, а саме:

1. Інтенсивність ВКР значно більша за інтенсивність звичайного (спонтанного) КРС і може сягати 20 і більше відсотків від інтенсивності лазерного пучка.
2. Явище ВКР має пороговий характер: воно виникає при інтенсивності лазерного випромінювання, що перевищує деяку порогову величину, причому розсіяне випромінювання стає когерентним і ступінь його когерентності наближається до ступеня когерентності лазерного пучка.
3. При ВКР розсіяне випромінювання має певну направленість: наприклад? стоксове випромінювання розповсюджується в напрямку падаючого лазерного пучка в межах кута 2-3°.
4. При появі стоксових ліній з $\omega_S=\omega_L-\Omega$ з'являються антистоксові з $\omega_{AS} = \omega_L + \Omega$
5. Антистоксове випромінювання відсутнє в напрямку падаючого лазерного пучка, а поширюється під строго визначеним кутом до нього, а саме, вздовж бічної поверхні деяких конусів, апертура яких не перевищує 10°.
6. Крім ліній ВКР першого порядку, можна спостерігати стоксові лінії з частотами $\omega_S^{(n)} = \omega_L - n\Omega$ та антистоксові з $\omega_{AS}^{(n)} = \omega_L + n\Omega$, незалежно від ступеня ангармонізму відповідних внутрішньомолекулярних коливань.
7. Ширина ліній КР значно зменшується при перевищенні порогу ВКР: для стоксової компоненти в декілька разів, для антистоксової – в декілька десятків разів.

Отже для стоксової компоненти ВКР маємо:

$$\frac{dn_S}{dt} = D[(P(0) - P(1)]n_S n_L \qquad (3.37)$$

або

$$\frac{dn_S}{dz} = \frac{Dn'}{c}[(P(0) - P(1)]n_S n_L . \qquad (3.38)$$

Таким чином, при вимушеному розсіянні швидкість генерації стоксових фотонів в розглядуваній моді пропорційна не лише кількості фотонів падаючого лазерного випромінювання, а й кількості стоксових фотонів! (Як і повинно бути в процесі вимушеного випромінювання). Кількість стоксових фотонів зростає за законом

$$n_S(z) = n_S(0)e^{-gZ} , \qquad (3.39)$$

де стала підсилення $g = \frac{Dn'}{c}[(P(0) - P(1)]n_L$. Ця стала підсилення g>0, оскільки $(P(0) - P(1) = P(0)[1 - \exp(-h\Omega_v / kT)]$>0. Стала підсилення прямо пропорційна інтенсивності (кількості квантів) лазерного випромінювання. Лазерний пучок в таких експериментах часто називають пучком накачки, оскільки саме він постачає енергію необхідну для підсилення потоку стоксових фотонів.

Направленість та монохроматичність вимушеного стоксового випромінювання обумовлені тим, що як тільки деяка стоксова мода (звичайно мода з найменшими втратами) переходить у режим ВКР, то дія її змінного електричного поля на молекули середовища разом з дією лазерного поля накачки спричинює вимушені молекулярні коливання в таких фазових співвідношеннях, які виключають перехід у режим ВКР інших стоксових мод. За відсутності резонатора для стоксового випромінювання його інтенсивність максимальна в напрямку лазерного пучка накачки, оскільки саме в цьому напрямку стоксовий пучок проходить максимальний шлях в середовищі, здатному його підсилювати.

Якщо ввести зворотний зв'язок, розмістивши комірку з речовиною в резонаторі і повертаючи назад в комірку за допомогою дзеркал з коефіцієнтами відбивання R_1 та R_2 частину стоксового випромінювання, яке пройшло вздовж комірки відстань L, то за умови $R_1 R_2 e^{2gL} \geq 1$ в резонаторі матиме місце $n_S = const$, що відповідає незгасаючим коливанням на частоті ω_S стоксового випромінювання. Умова самозбудження таких коливань є

$$g \geq -\frac{\ln R_1 R_2}{2L} . \qquad (3.40)$$

Звідси видно, що пороговий характер явища ВКР зумовлений наявністю втрат стоксових фотонів (у розглядуваному прикладі через дзеркала резонатора).

Однак, і в самій речовині завжди існують втрати стоксових фотонів, наприклад, за рахунок поглинання або пружного розсіяння, яке виводить їх за межі області, де є підсилення. Ці втрати пропорційні кількості стоксових фотонів. Їх можна врахувати додаванням до правої частини рівняння (3.38) члена $-\alpha n_S$. Тоді формула для порогового значення g набирає вигляду

$$g \geq -\frac{\ln R_1 R_2}{2L} + \alpha \qquad (3.41)$$

При великій довжині шляху L в середовищі роль першого доданку в правій частині незначна і порогове значення g для переходу розсіяння світла у вимушений режим визначається лише внутрішніми втратами в середовищі. Типовий приклад – ВКР в оптоволокні.

Одне з цікавих сучасних застосувань ВКР – раманівські підсилювачі в оптоволоконних лініях зв'язку. Вони здатні підсилювати сигнали на різних частотах ω_S безпосередньо в кварцевому світловоді використовуючи одне й те ж саме потужне коливання з частотою приблизно 460 $см^{-1}$: необхідно лише взяти таку частоту лазера накачки ω_L, щоб виконувалась умова $\omega_S = \omega_L - \Omega$.

Надзвичайно високий коефіцієнт перетворення потужності лазерного пучка частоти ω_L в потужність стоксового випромінювання на частоті ω_S пояснюється тим, що вимушений процес народження стоксових фотонів не містить ніяких механізмів втрат фотонів і відбувається з ймовірністю пропорційною добутку $\boldsymbol{n_S\, n_L}$. В принципі цей коефіцієнт перетворення може досягати одиниці.

Аналогічні міркування щодо антистоксового процесу зображеного на рис. 3.2 приводять до рівняння

$$\frac{dn_{AS}}{dt} = D'P(1)n_L(n_{AS}+1) - D'P(0)n_{AS}(n_L+1)\,, \qquad (3.42)$$

яке при $n_{AS} << 1$ (спонтанне КРС) переходить в рівняння

$$\frac{dn_{AS}}{dt} = D'P(1)n_L\,, \qquad (3.43)$$

а при $n_{AS} >> 1$ в рівняння

$$\frac{dn_{AS}}{dt} = D'n_L n_{AS}\left[P(1) - P(0)\right]. \qquad (3.44)$$

Рівняння (3.43) пояснює сильну залежність антистоксового розсіяння від температури: імовірність знайти молекули в збудженому

коливальному стані $\mathrm{v}=1$: $P(1)\sim e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$, де $\hbar\omega$ – енергія коливального кванту.

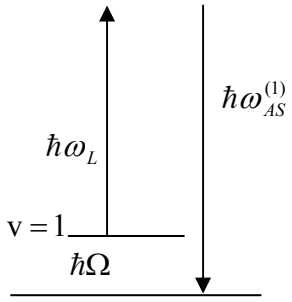


Рис. 3.2

Рівняння (3.48) показує, що антистоксова компонента, що народжується в процесі, показаному на рис. 3.2, при великих числах заповнення n_L та n_{AS} буде загасати, оскільки $\left[P(1)-P(0)\right]<0$.

Можливий процес, в якому коливальне збудження молекули $\mathrm{v}=1$, що виникає в антистоксовому процесі першого порядку разом з ще одним лазерним фотоном з тієї ж самої моди випромінювання, породжує антистоксовий фотон (рис.3.3), тобто два лазерні фотони зникаючи одночасно, породжують одночасно один стоксовий і один антистоксових фотон. Повна енергія системи речовина+поле при цьому не змінюється.

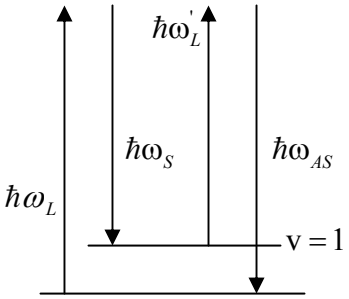


Рис. 3.3

Імовірність такого процесу пропорційна квадрату матричного елементу

$$\left|\left\langle 0, n_L-2, n_S+1, n_{AS}+1\middle|\hat{C}_L\hat{C}_L\hat{C}_S^{+}\hat{C}_{AS}^{+}\middle|n_{AS}, n_S, n_L, 0\right\rangle\right|^2 =$$

$$=\left(n_L-1\right)n_L\left(n_S+1\right)\left(n_{AS}+1\right)\ . \qquad (3.45)$$

Зворотній процес має ймовірність пропорційну величині

$$\left|\left\langle 0, n_L+2, n_S-1, n_{AS}-1\middle|\hat{C}_L^{+}\hat{C}_L^{+}\hat{C}_S\hat{C}_{AS}\middle|n_{AS}, n_S, n_L, 0\right\rangle\right|^2 =$$

$$=\left(n_L+2\right)\left(n_L+1\right)n_S n_{AS}\ . \qquad (3.46)$$

Відповідне рівняння для антистоксових фотонів має такий вигляд

$$\frac{dn_{AS}}{dt}=D''\left(n_L-1\right)n_L(n_S+1)(n_{AS}+1)-D''\left(n_L+2\right)\left(n_L+1\right)n_S n_{AS}\,, \qquad (3.47)$$

звідки при $n_L >> 1$ та $n_S >> 1$ отримаємо

$$\frac{dn_{AS}}{dt}=D''n_L^2 n_S(n_{AS}+1-n_{AS})=D''n_L^2 n_S\ , \qquad (3.48)$$

тобто інтенсивність антистоксової компоненти в режимі ВКР пропорційна інтенсивності стоксової компоненти і квадратично залежить від інтенсивності лазерного випромінювання. Таким чином нам вдалося пояснити виникнення антистоксових ліній ВКР $\omega_{AS}=\omega_L+\Omega$ при появі стоксових ліній $\omega_S=\omega_L-\Omega$.

У розглянутому процесі зникнення двох тотожних фотонів поля з одночасним виникненням стоксового та антистоксового фотонів повинна зберігатись не лише повна енергія, а й імпульс. Відповідну векторну діаграму подано на рис. 3.4. Враховуючи аксіальну симетрію задачі зразу можна зробити висновок про поширення антистоксового випромінювання вздовж бічних поверхонь конусів (див. п.5на стор.51).

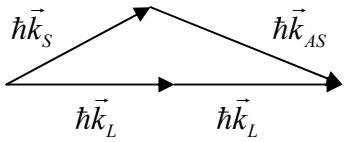


Рис. 3.4

Пояснимо наявність у розсіяному випромінюванні стоксових та антистоксових компонент вищих порядків: $\omega_S^{(n)}=\omega_L-n\Omega$ та $\omega_A^{(n)}=\omega_L+n\Omega$. Нагадаємо, що стоксова компонента першого порядку $\omega_S^{(1)}=\omega_L-\Omega$ виникає в процесі, схема якого показана на рис.3.1.

Стоксова компонента другого порядку $\omega_S^{(1)} = \omega_L - 2\Omega$ виникає в процесі, схема якого показана на рис.3.5.

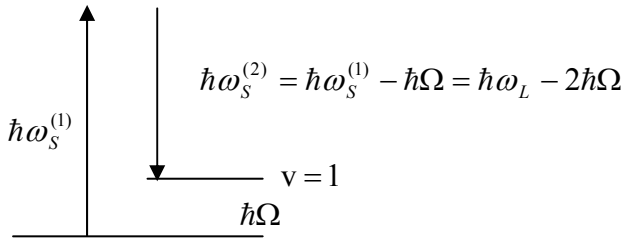


Рис. 3.5

У цьому процесі відбувається вимушене стоксове розсіяння стоксової компоненти першого порядку. Антистоксова компонента першого порядку $\omega_S^{(1)} = \omega_L + \Omega$ виникає в процесі, схема якого показана на Рис.3.2. Антистоксова компонента другого порядку $\omega_S^{(2)} = \omega_L + 2\Omega$ виникає в процесі, схема якого показана на Рис.3.6.

У цьому процесі відбувається вимушене антистоксове розсіяння антистоксової компоненти першого порядку. Якщо стоксове та антистоксове випромінювання другого порядку достатньо інтенсивне, то внаслідок їх вимушеного розсіяння може виникнути випромінювання третього порядку і т.д.

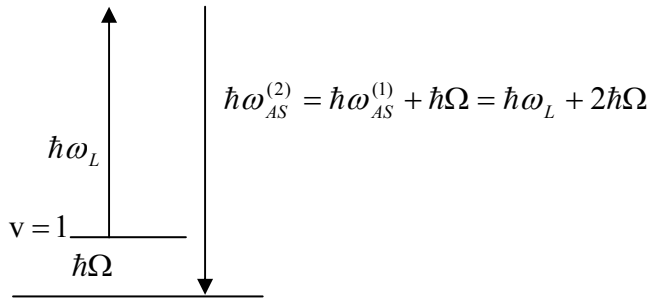


Рис.3.6.

Таким чином, на основі квантового підходу ми пояснили ряд важливих рис явища ВКР. Але деякі особливості ВКР залишились без пояснення. Так як при ВКР числа заповнення $\boldsymbol{n_S, n_L >> 1}$, то є підстави для їх аналізу використовувати класичний підхід, оскільки так звані когерентні стани електромагнітного поля при великих числах

заповнення відповідають класичним електромагнітним хвилям (див. розділ 5).

Відхилення атомів світлом

Оскільки фотон має імпульс, то при поглинанні фотона атом має відчувати "віддачу", зміщуючись на певну відстань. Цей ефект має також проявлятися в спектрі як зміна доплерівського зсуву спектральних ліній в експериментах без зовнішнього поля і з ним. Передача імпульсу від фотона до атома при поглинанні фотона досліджувалась в експериментах із вивчення відхилення атомного пучка (атомів натрію) світлом: експерименти Picque, Vialle [12] (1972). Результати вимірювань розподілу густини атомів у пучку у напрямках, паралельному та перпендикулярному до напрямку поширення світла представлено на рис. 4.1. Отже видно, що в перпендикулярному напрямку (рис. 4.1(а)) має місце

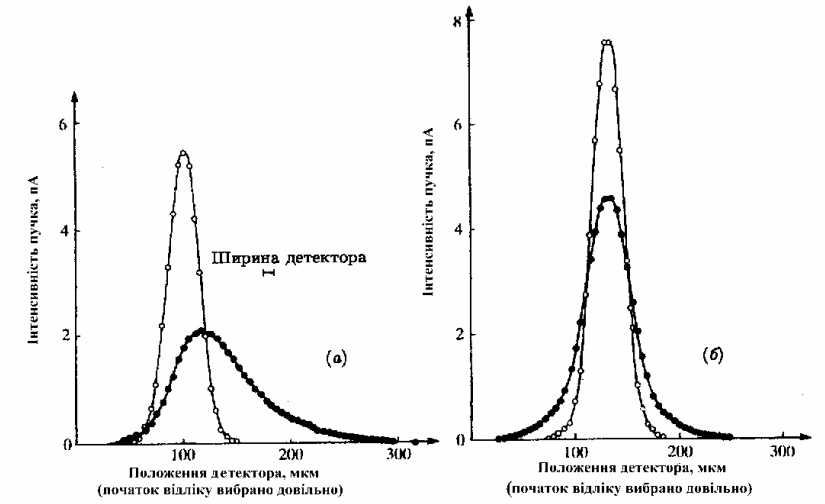


Рис. 4.1

тільки розширення пучка внаслідок розсіяння атомів, а в паралельному напрямку (рис. 4.1(б)) має місце помітне зміщення атомного пучка в напрямку поширення світла.

Охолодження й полонення (захоплення) атомів світлом

У випадку великої кількості актів поглинання і спонтанного випромінювання фотонів резонансна взаємодія атома і світла може

привести до уповільнення (охолодження) атома і, у кінцевому рахунку, до його полонення світлом. Відповідно до оцінок Ханша і Шавлова (Hansch and Schawlow [13], 1975) нейтральні атоми можна охолодити до температур порядку кількох мілікельвінів у процесі збудження їх майже резонансним лазерним пучком і наступним спонтанним випромінюванням. Для того щоб зрозуміти основну ідею, розглянемо таку ситуацію. Нехай дворівневий атом, що має частоту переходу ω_0, масу M та швидкість $\vec{V}$, рухається назустріч квазімонохроматичному лазерному пучку, що має хвильовий вектор $\vec{k}_L$ і частоту ω_L. Припустимо, що спектральна ширина випромінювання лазера набагато менша як природно, так і доплерівськи розширеної атомної лінії, і що частота ω_L менша за ω_0 на деяку величину $\delta\omega$. Якщо вектори $\vec{V}$ і $\vec{k}_L$ протилежно спрямовані, то в системі координат атома, що рухається, світло має допплерівські зміщену частоту $\omega_L - \vec{k}_L \cdot \vec{V} = \omega_L\left(1 + V/c\right)$. Нехай $\omega_L V/c$ є порядку $\delta\omega$. Тоді фотони, що наближаються до атома, знаходяться в точному резонансі з атомним переходом, і поглинання одного такого фотона призводить до передачі атому імпульсу $\hbar\vec{k}_L$ у лабораторній системі координат, а отже імпульс $M\vec{V}$ атома набуває значення $M\left(\vec{V} - \Delta\vec{V}\right)$. Зміна швидкості $\Delta\vec{V}$ визначається в цьому випадку співвідношенням

$$M\Delta\vec{V} = \hbar\vec{k}_L \tag{4.1}$$

і спрямована протилежно швидкості $\vec{V}$, внаслідок чого атом сповільнюється. Якщо тепер збуджений атом спонтанно випромінює фотон із хвильовим вектором $\vec{k}$, то його імпульс знову змінюється на величину $-\hbar\vec{k}$. Але оскільки напрям $\vec{k}$ при спонтанних переходах невизначений, то при усередненні за великою кількістю актів випромінювання: $\left\langle \hbar\vec{k} \right\rangle = 0$, а тому середній імпульс, що надається атому за один акт поглинання і за один акт випромінювання фотона, визначається виразом (4.1), тобто атом уповільнюватиметься. При вимушених переходах випускання фотона відбувається в напрямку поширення лазерного пучка, і атом знову прискорюється до попередньої швидкості: сумарний імпульс, переданий атому при послідовних вимушених переходах з поглинанням та випусканням фотонів дорівнює нулю. Але за відсутності інверсійної заселеності

спонтанні переходи переважають, і тому атоми ефективно охолоджуються. Зайве говорити, що якщо вектори $\vec{V}$ і $\vec{k}_L$ направлені однаково, то допплерівські зміщена частота виходить рівною $\omega_L\left(1-V/c\right)$ і виявляється істотно меншою за частоту атомного переходу ω_0, що робить поглинання фотона малоймовірним.

Таким чином, атоми, що рухаються назустріч світлу, сповільнюються в процесі повторюваних актів поглинання і спонтанного перевипромінювання, тоді як атоми, що рухаються в напрямку світла, не сповільнюються. Опромінення атомів з усіх боків, при якому деякий вектор $\vec{k}_L$ завжди має складову, протилежну швидкості атома, забезпечує фактично уповільнення всіх атомів. Вираз (4.1) дає оцінку $\Delta V \approx 6$ см/с для атомів магнію, що випромінюються світлом з частотою, нижче резонансної (λ = 2851.1 Å). Оскільки середньоквадратична швидкість $V = \left(3k_BT/M\right)^{1/2}$, де k_B – стала Больцмана, дорівнює 800 м/с при T = 600 К, потрібно приблизно $V/\Delta V$ = 13000 циклів поглинання і випромінювання фотонів для зменшення швидкості до значень, близьких до нульового. У цьому випадку спектральна ширина атомної лінії зменшується від значення доплерівського розширення до значення природного розширення. Якщо інтенсивність збуджуючого світла досить висока для того, щоб наситити атомний перехід, то при радіаційному часі життя верхнього стану τ, рівному 2 нс, час одного циклу поглинання і спонтанного випромінювання виходить близьким до 4 нс. Отже, потрібен час щонайменше $\left(V/\Delta V\right)\tau \approx 60$ мкс для того, щоб охолодити атом до температури, близької до нуля і фактично привести його в стан спокою. Ханш і Шавлов припустили, що для її практичного втілення досить шести лазерних пучків, спрямованих паралельно й антипаралельно трьом координатним осям. Крім цього, ці лазерні пучки здатні утримати повільні атоми. В експериментах на нейтральних атомах натрію (Phillips and Metcalf [14], 1982) були досягнуті ефективні температури порядку 70 мК. Перша пастка нейтральних атомів, заснована на викладених вище принципах, була створена дещо пізніше (Raab, Prentiss, Cable, Chu and Pritchard [15], 1987).

Оптична меласа

Хоча вираз (4.1) і пов'язані з ним міркування пояснюють загалом явища сповільнення й полонення атомів, важливо пам'ятати, що він стосується тільки середнього переданого імпульсу, усередненого за багатьма циклами поглинання й випромінювання. Внаслідок того, що спонтанно випущені фотони мають випадкові напрямки, вони вносять великі флуктуації у рух атома. Крім того, кількість циклів флуоресценції, які відбуваються за будь-який заданий проміжок часу, є випадковою величиною. У результаті рух атома набуває характеру броунівського руху і середньоквадратична відстань, яку проходить атом за заданий інтервал часу, пропорційна $\sqrt{t}$, а не t . Дифузійний рух атома, зумовлений впливом світла, нагадує рух у в'язкій рідині й отримав назву руху в *оптичній меласі*[1]. Це явище спостерігалося вперше в роботі (Chu, Hollberg, Bjorkholm, Cable and Ashkin [16], 1985).

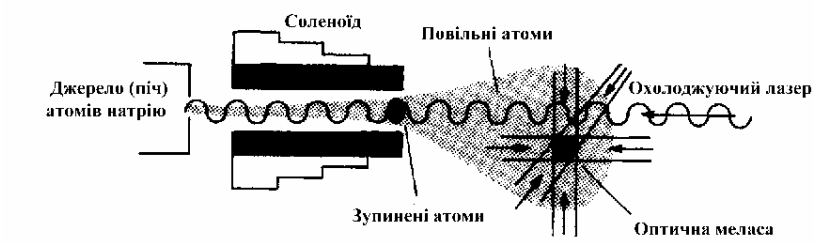


Рис. 4.2

На рис. 4.2 показано схему установки, що використовувалася для вивчення охолодження і в'язкого утримання атомів натрію в оптичній меласі. Пучок атомів натрію направляється вздовж осі конічного соленоїда, що компенсує змінний доплерівський зсув зеєманівським зсувом. При цьому атомний пучок постійно охолоджується лазерним пучком, що поширюється назустріч. Атоми, що не зупиняються цілком за час проходження крізь соленоїд, вилітають у головну експериментальну камеру, де деякі з них захоплюються в меласі в області перетину шести лазерних пучків. У цьому експерименті

[1] Меласа – густий в'язкий продукт, що утворюється при виробництві цукру.

максимальна густина потужності світла в меласі була порядку 60 мВт/см^2.

Оцінка найменшої досяжної температури, заснована на балансі енергії

Розглянемо коротко, як залежить очікувана остаточна температура T атомів від різниці $\delta\omega \equiv \omega_0 - \omega_L$ між частотою лазера і резонансною частотою атомного переходу та від інтенсивності I. Атом маси *M,* що переміщується в квазів'язкій рідині, піддається впливу гальмівної сили $-\alpha V$, яка пропорційна середній швидкості V, у результаті чого атом втрачає енергію (охолоджується) із середньою швидкістю

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{froz} = -\alpha V^2 . \tag{4.2}$$

Коефіцієнт загасання α приблизно визначається за формулою (Lett, Phillips, Rolston, Tanner, Watts, Westbrook [17], 1989)

$$\alpha = -4\hbar k^2 \frac{I}{I_0} \frac{2\delta\omega\,\Gamma}{\left[1+\left(2\delta\omega/\Gamma\right)^2\right]^2} \text{ при } kV << \Gamma, \delta\omega \text{ ; } I << I_0 , \tag{4.3}$$

де I_0 – інтенсивність світла при насиченні, Γ – природна ширина лінії і $k = \omega/c$. У той же час атом набуває енергії зі швидкістю $\left(dE/dt\right)_{heat}$ внаслідок випадкових випромінювань і поглинань фотонів. В одновимірному випадку швидкість нагрівання може бути виражена у вигляді (Lett, Phillips, Rolston, Tanner Watts, Westbrook [17], 1989):

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{heat} = \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma}{M} \frac{I/I_0}{1+\left(2\delta/\Gamma\right)^2} . \tag{4.4}$$

У стаціонарному стані швидкості втрати і отримання енергії повинні бути рівні, так, що

$$\left\langle V^2 \right\rangle = \frac{\hbar\Gamma}{4M} \frac{1+\left(2\delta\omega/\Gamma\right)^2}{2\delta\omega/\Gamma} . \tag{4.5}$$

Якщо тепер, як звичайно, ототожнити середній квадрат швидкості в одному вимірі, помножений на $\frac{1}{2}M$, з величиною $\frac{1}{2}k_B T$, то

отримаємо стандартне співвідношення для мінімально досяжної температури T:

$$k_B T = \frac{\hbar\Gamma}{4} \cdot \frac{1+\left(2\delta\omega/\Gamma\right)^2}{2\delta\omega/\Gamma}. \qquad (4.6)$$

Ця функція має мінімум у точці $\frac{2\delta\omega}{\Gamma}=1$, при цьому $kT_{\min}=\frac{\hbar\Gamma}{2}$. Отримана формула визначає так звану доплерівську межу охолодження атомів розглянутим способом. Для атомів натрію формула (4.6) дає мінімальну досяжну температуру порядку 1мК.

Однак, експериментально за допомогою установки, зображеної на рис. 4.2, вдається отримати значно більш низькі температури. На рис.4.3 наведено результати вимірювань температури оптичної меласи атомів натрію як функцію відхилення частоти нижче резонансу. Цим методом можна досягти температур порядку декількох десятків мікрокельвінів, що більш ніж на порядок менше тієї межі, що встановлюється формулою (4.6). Суцільна крива на рис.4.3 побудована за формулою (4.6).

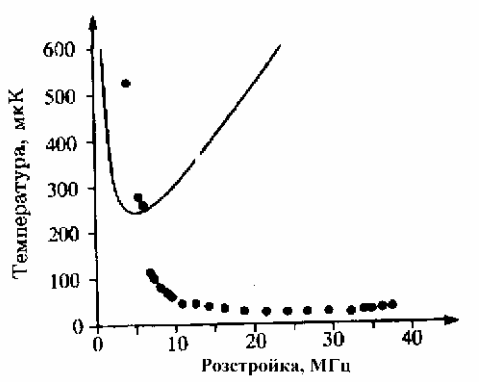


Рис. 4.3

Видно, що експериментальні результати демонструють невідповідність із простим розглядом, наведеним вище, і необхідність у більш строгій теорії. Така теорія була розвинута в роботі (Dalibard, Cohen-Tannoudji [18], 1989).

РОЗДІЛ 5: Квантові стани випромінювання

Оператор фази фотона.

Коли ми вводили оператори $\hat{C}$ та $\hat{C}^+$, то для визначеності вважали, що фаза цих операторів рівна 0, тобто $\varphi = 0$. Тепер же ми запишемо оператори в загальному вигляді. Почнемо з оператора знищення, записавши його у такому вигляді (оскільки $\hat{C}\left|n+1\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n\right\rangle$):

$$\hat{C} = \left(\hat{n}+1\right)^{1/2} e^{i\hat{\varphi}} \ , \tag{5.1}$$

де $e^{i\hat{\varphi}}$ – оператор фази фотона. Оператор кількості частинок $\hat{n}$ відповідає за амплітуду поля, $\hat{\varphi}$ – за фазу: $n \sim I \sim \left|A\right|^2$, $E = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)}$.

Властивості оператора фази .

Маємо: $e^{i\hat{\varphi}} = (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{C}$. Спряжений оператор: $e^{-i\hat{\varphi}} = \hat{C}^+(\hat{n}+1)^{-1/2}$.Отже:

$$\begin{aligned} e^{i\hat{\varphi}} \cdot e^{-i\hat{\varphi}} &= (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{C}\hat{C}^+(\hat{n}+1)^{-1/2} = \left|\left[\hat{C},\hat{C}^+\right] = \hat{C}\hat{C}^+ - \underbrace{\hat{C}^+\hat{C}}_{\hat{n}} = 1\right| = \\ &= (\hat{n}+1)^{-1/2}(\hat{n}+1)(\hat{n}+1)^{-1/2} = 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Але в той же час:

$$e^{-i\hat{\varphi}} \cdot e^{i\hat{\varphi}} = \hat{C}^+(\hat{n}+1)^{-1/2}(\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{C} \neq 1. \tag{5.3}$$

Розглянемо, яким чином ці оператори діють на стани фотонів.

$$e^{i\hat{\varphi}}\left|n\right\rangle = (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{C}\left|n\right\rangle = (\hat{n}+1)^{-1/2}\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle = \sqrt{n}(\hat{n}+1)^{-1/2}\left|n-1\right\rangle \quad [=]$$

$$(\hat{n}+1)^m\left|n-1\right\rangle = \left[\begin{array}{l} (1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \\ + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \end{array}\right] =$$

$$= \left|n-1\right\rangle + m\hat{n}\left|n-1\right\rangle + \frac{m(m-1)}{2!}\hat{n}^2\left|n-1\right\rangle + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\hat{n}^3\left|n-1\right\rangle +$$

$$+ \ldots (=)$$

$$\hat{n}\left|n-1\right\rangle=(n-1)\left|n-1\right\rangle;\hat{n}^2\left|n-1\right\rangle=\hat{n}\hat{n}\left|n-1\right\rangle=(n-1)\hat{n}\left|n-1\right\rangle=$$
$$=(n-1)^2\left|n-1\right\rangle;$$
$$(=)[1+m(n-1)+\frac{m(m-1)}{2!}(n-1)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(n-1)^3+$$
$$+\ldots]\left|n-1\right\rangle=(1+n-1)^m\left|n-1\right\rangle=n^m\left|n-1\right\rangle;$$
$$[=]n^{1/2}n^{-1/2}\left|n-1\right\rangle=\left|n-1\right\rangle;$$

Отже, таким чином:

$$e^{i\hat{\varphi}}\left|n\right\rangle=\begin{cases}\left|n-1\right\rangle, & n\neq 0;\\ \left|0\right\rangle, & n=0.\end{cases} \tag{5.4}$$

З іншого боку:

$$e^{-i\hat{\varphi}}\left|n\right\rangle=\hat{C}^{+}(\hat{n}+1)^{-1/2}\left|n\right\rangle=\hat{C}^{+}n^{-1/2}\left|n\right\rangle(=)$$
$$(\hat{n}+1)^m\left|n\right\rangle=(1+m\hat{n}+\frac{m(m-1)}{2!}\hat{n}^2+\ldots)\left|n\right\rangle=\left|n\right\rangle+m\hat{n}\left|n\right\rangle+$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}\hat{n}^2\left|n\right\rangle+\ldots=(1+n)^m\left|n\right\rangle;$$
$$(=)\hat{C}^{+}(n+1)^{-1/2}\left|n\right\rangle.$$

А отже:

$$e^{-i\hat{\varphi}}\left|n\right\rangle=\left|n+1\right\rangle. \tag{5.5}$$

Оператор $\hat{O}$ називається ермітовим, якщо $\left\langle i\left|\hat{O}\right|j\right\rangle=\left\langle j\left|\hat{O}\right|i\right\rangle^{*}$. Для операторів $e^{i\hat{\varphi}}$ та $e^{-i\hat{\varphi}}$ мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned}&\left\langle n-1\left|e^{i\hat{\varphi}}\right|n\right\rangle=\left\langle n-1\right|\left.n-1\right\rangle=1; \quad \left\langle n+1\left|e^{-i\hat{\varphi}}\right|n\right\rangle=\left\langle n+1\right|\left.n+1\right\rangle=1;\\ &\left\langle n\left|e^{i\hat{\varphi}}\right|n-1\right\rangle=\left\langle n\right|\left.n-2\right\rangle=0; \qquad \left\langle n\left|e^{-i\hat{\varphi}}\right|n+1\right\rangle=\left\langle n\right|\left.n+2\right\rangle=0.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Отже, звідси випливає, що оператори $e^{i\hat{\varphi}}$ та $e^{-i\hat{\varphi}}$ не є ермітовими. Але з них можна сконструювати ермітові оператори для того, щоб власні значення відповідних операторів були дійсними і їх можна було виміряти експериментально. Такими ермітовими операторами будуть:

$$\cos\hat{\varphi}=\frac{1}{2}\left(e^{i\hat{\varphi}}+e^{-i\hat{\varphi}}\right) \text{ та } \sin\hat{\varphi}=\frac{1}{2i}\left(e^{i\hat{\varphi}}-e^{-i\hat{\varphi}}\right). \qquad (5.7)$$

Доведемо це.

$$\langle n-1|\cos\hat{\varphi}|n\rangle=\frac{1}{2}\left[\langle n-1|e^{i\hat{\varphi}}|n\rangle+\langle n-1|e^{-i\hat{\varphi}}|n\rangle\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\langle n-1|n-1\rangle}_{=1}+\underbrace{\langle n-1|n+1\rangle}_{=0}\right]=\frac{1}{2};$$

$$\langle n|\cos\hat{\varphi}|n-1\rangle=\frac{1}{2}\left[\langle n|e^{i\hat{\varphi}}|n-1\rangle+\langle n|e^{-i\hat{\varphi}}|n-1\rangle\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\langle n|n-2\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1}\right]=\frac{1}{2}.$$

$$\langle n-1|\sin\hat{\varphi}|n\rangle=\frac{1}{2i}\left[\langle n-1|e^{i\hat{\varphi}}|n\rangle-\langle n-1|e^{-i\hat{\varphi}}|n\rangle\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\underbrace{\langle n-1|n-1\rangle}_{=1}-\underbrace{\langle n-1|n+1\rangle}_{=0}\right]=\frac{1}{2i};$$

$$\langle n|\sin\hat{\varphi}|n-1\rangle=\frac{1}{2i}\left[\langle n|e^{i\hat{\varphi}}|n-1\rangle-\langle n|e^{-i\hat{\varphi}}|n-1\rangle\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\underbrace{\langle n|n-2\rangle}_{=0}-\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1}\right]=-\frac{1}{2i}.$$

Тому $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ можна виміряти. Встановимо комутаційні співвідношення для операторів $\cos\hat{\varphi}$ та $\sin\hat{\varphi}$

$$\left[\cos\hat{\varphi},\sin\hat{\varphi}\right]=\cos\hat{\varphi}\sin\hat{\varphi}-\sin\hat{\varphi}\cos\hat{\varphi}=\frac{1}{2i}\left[\hat{C}+(\hat{n}+1)^{-1}\hat{C}-1\right], \qquad (5.8)$$

тобто оператори $\cos\hat{\varphi}$ і $\sin\hat{\varphi}$ не комутують, отже одночасно точно виміряти їх власні значення не можна. Легко бачити, що:

$$\langle n|[\cos\hat{\varphi},\sin\hat{\varphi}]|m\rangle=\begin{cases}0, n\neq 0, m\neq 0;\\ -\frac{1}{2}, n=m=0.\end{cases} \tag{5.9}$$

Чи можна одночасно виміряти і фазу, і амплітуду? Щоб дати відповідь на це питання, запишемо комутаційні співвідношення для операторів $\hat{n}$ та $\cos\hat{\varphi}$, $\sin\hat{\varphi}$:

$$[\hat{n},\cos\hat{\varphi}]=\frac{1}{2}\left[\hat{n},\left(e^{i\hat{\varphi}}+e^{-i\hat{\varphi}}\right)\right]=\frac{1}{2}\underbrace{(\hat{n}e^{i\hat{\varphi}}+\hat{n}e^{-i\hat{\varphi}}-e^{-i\hat{\varphi}}\hat{n}-e^{-i\hat{\varphi}}\hat{n})}_{\hat{O}_1};$$

$$\hat{n}e^{i\hat{\varphi}}|n\rangle=\hat{n}|n-1\rangle=(n-1)|n-1\rangle;\quad \hat{n}e^{-i\hat{\varphi}}|n\rangle=\hat{n}|n+1\rangle=$$

$$=(n+1)|n+1\rangle;$$

$$e^{i\hat{\varphi}}\hat{n}|n\rangle=ne^{i\hat{\varphi}}|n\rangle=n|n-1\rangle;\quad e^{-i\hat{\varphi}}\hat{n}|n\rangle=ne^{-i\hat{\varphi}}|n\rangle=n|n+1\rangle;$$

$$\hat{O}_1|n\rangle=\frac{1}{2}(-|n-1\rangle+|n+1\rangle)=\frac{1}{2}(e^{-i\hat{\varphi}}|n\rangle-e^{i\hat{\varphi}}|n\rangle)=$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{i\hat{\varphi}}-e^{-i\hat{\varphi}})|n\rangle)=-i\frac{1}{2i}(e^{i\hat{\varphi}}-e^{-i\hat{\varphi}})|n\rangle=-i\sin\hat{\varphi}|n\rangle.$$

легко показати, що $[\hat{n},\sin\hat{\varphi}]=i\cos\hat{\varphi}$. Таким чином:

$$\begin{cases}[\hat{n},\cos\hat{\varphi}]=-i\sin\hat{\varphi};\\ [\hat{n},\sin\hat{\varphi}]=i\cos\hat{\varphi},\end{cases} \tag{5.10}$$

тобто оператори $\cos\hat{\varphi}$ та $\sin\hat{\varphi}$ не комутують, отже, для них існують співвідношення невизначеності, тобто неможливо одночасно виміряти точно фазу та амплітуду електромагнітного поля. Якщо точно виміряти фазу, то кількість фотонів (амплітуда) вимірюється з деякою невизначеністю, і навпаки.

Стани з точно визначеною фазою фотона.

Розглянемо стани фотона з точно визначеною фазою, тобто стани, для яких невизначеність фази рівна нулю: $\Delta\varphi=0$. Хвильова функція станів із точно визначеною фазою вводиться як лінійна суперпозиція станів із визначеною кількістю фотонів таким чином:

$$\left|\varphi\right\rangle = \lim_{S\to\infty}(S+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{S} e^{in\varphi}\left|n\right\rangle \ . \qquad (5.11)$$

Ці стани є ортонормованими: $\left\langle\varphi\middle|\varphi\right\rangle = 1$. Розглянемо, яким чином діють оператори $\cos\hat{\varphi}$ і $\sin\hat{\varphi}$ на стани з точно визначеною фазою $\left|\varphi\right\rangle$.

$$\cos\hat{\varphi}\left|\varphi\right\rangle = \frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1/2}\Big(\sum_{n=0}^{S} e^{in\varphi}e^{i\hat{\varphi}}\left|n\right\rangle + \sum_{n=0}^{S} e^{in\varphi}e^{-i\varphi}\left|n\right\rangle\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1/2}\left[\sum_{n=1}^{S} e^{in\varphi}\left|n-1\right\rangle + \sum_{n=0}^{S} e^{in\varphi}\left|n+1\right\rangle\right](=)$$

$$\sum_{n=1}^{S} e^{in\varphi}\left|n-1\right\rangle + \sum_{n=0}^{S} e^{in\varphi}\left|n+1\right\rangle = e^{i\varphi}\left|0\right\rangle + e^{i2\varphi}\left|1\right\rangle + e^{i3\varphi}\left|2\right\rangle + \ldots +$$

$$+ e^{iS\varphi}\left|S-1\right\rangle + \left|1\right\rangle + e^{i\varphi}\left|2\right\rangle + e^{i3\varphi}\left|3\right\rangle + \ldots + e^{i(S-2)\varphi}\left|S-1\right\rangle +$$

$$+ e^{i(S-1)\varphi}\left|S\right\rangle + e^{iS\varphi}\left|S+1\right\rangle - e^{i\varphi}(0) - e^{-i\varphi}\left|0\right\rangle + e^{i(S+1)\varphi}\left|S\right\rangle -$$

$$- e^{i(S+1)}\left|S\right\rangle = (e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\left|0\right\rangle + e^{i\varphi}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\left|1\right\rangle +$$

$$+ e^{2i\varphi}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\left|2\right\rangle + \ldots + e^{iS\varphi}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\left|S\right\rangle +$$

$$+ e^{iS\varphi}\left|S+1\right\rangle - e^{i(S+1)\varphi}\left|S\right\rangle - e^{-i\varphi}\left|0\right\rangle = 2\cos\varphi\sum_{n=0}^{S} e^{in\varphi}\left|n\right\rangle + (\ldots);$$

$$(=)\,2\cos\varphi\,\frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1/2}\sum_{n=0}^{S} e^{in\varphi}\left|n\right\rangle +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1/2}\left|e^{iS\varphi}\left|S+1\right\rangle - e^{i(S+1)\varphi}\left|S\right\rangle - e^{-i\varphi}\left|0\right\rangle\right.}_{A_1}.$$

Отже:

$$\cos\hat{\varphi}\left|\varphi\right\rangle = \cos\varphi\left|\varphi\right\rangle + A_1 \ . \qquad (5.12)$$

Якщо $S \to \infty$ то $A_1 \to 0$, тобто в граничному випадку $S \to \infty$ система $|\varphi\rangle$ є системою власних функцій оператора $\cos\hat{\varphi}$, а величини $\cos\varphi$ є власними значеннями цього оператора.

Аналогічно для оператора $\sin\hat{\varphi}$ отримаємо:

$$\sin\hat{\varphi}|\varphi\rangle = \sin\varphi|\varphi\rangle + A_2. \tag{5.13}$$

Знову, якщо $S \to \infty$, то $A_2 \to 0$, тобто при $S \to \infty$ система $|\varphi\rangle$ є також системою власних функцій оператора $\sin\hat{\varphi}$, а величини ё$\sin\varphi$ є власними значеннями цього оператора. Для матричних елементів цих операторів мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi|\cos\hat{\varphi}|\varphi\rangle = \cos\varphi(1 - \lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1}) = \cos\varphi;\\
&\langle\varphi|\sin\hat{\varphi}|\varphi\rangle = \sin\varphi(1 - \lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1}) = \sin\varphi;\\
&\langle\varphi|\cos^2\hat{\varphi}|\varphi\rangle = \cos^2\varphi; \quad \langle\varphi|\sin^2\hat{\varphi}|\varphi\rangle = \sin^2\varphi.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Таким чином, у станах електромагнітного поля з точно визначеною фазою можна визначити власні значення $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$, а отже і саму фазу φ, тобто невизначеність фази рівна нулю: $\Delta\varphi = 0$.

Тепер знайдемо невизначеність кількості фотонів Δn. За міру невизначеності деякої величини x приймають її середньоквадратичне відхилення Δx, яке визначається як

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\ . \tag{5.15}$$

Отже:

$$\begin{aligned}
\overline{n} = \langle\varphi|\hat{n}|\varphi\rangle &= \lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1/2}\sum_{n=0}^{S} e^{-2in\varphi}e^{2in\varphi}\underbrace{\langle n|\hat{n}|n\rangle}_{n} =\\
&= \lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1}\sum_{n=0}^{S} n = \lim_{S\to\infty}\frac{1}{2}S \to \infty\ ;
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\left\langle \varphi \left| \hat{n}^2 \right| \varphi \right\rangle = \lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1}\sum_{n=0}^{S}\left\langle n \left| \hat{n}^2 \right| n \right\rangle = \lim_{S\to\infty}(1+S)^{-1}\sum_{n=0}^{S} n^2 = \\ = \lim_{S\to\infty}\frac{S(2S+1)}{6} \to \infty. \tag{5.17}$$

Отже абсолютна середньоквадратична невизначеність кількості фотонів є нескінченною:

$$\Delta n \to \infty . \tag{5.18}$$

На відміну від неї відносна середньоквадратична невизначеність кількості фотонів

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta n}{\overline{n}} = \frac{\sqrt{\overline{n^2} - \overline{n}^2}}{\overline{n}} = \lim_{S\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{6}S(2S+1) - \frac{1}{4}S^2}}{\frac{1}{2}S} = \\ = \lim_{S\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4}{3}S^2 - \frac{2}{3}S - S^2}}{S} = \lim_{S\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{3}S^2 - \frac{2}{3}S}}{S} = \\ = \lim_{S\to\infty}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{S}} = 1/\sqrt{3} \tag{5.19}$$

є скінченою і постійною величиною: $\Delta n/\overline{n} = 1/\sqrt{3}$.

Тепер знайдемо середньоквадратичну невизначеність вимірювання напруженості електричного поля. Як було показано вище:

$$\hat{E} = i\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}\left[\hat{C}e^{i\beta} - \hat{C}^{+}e^{-i\beta}\right],$$

де $\beta = \vec{kr} - \omega t$.

А отже

$$\overline{E} = \left\langle \varphi \left| \hat{E} \right| \varphi \right\rangle = i\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}\lim_{S\to\infty\infty}(1+S)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underbrace{\left\langle n \left| \hat{C} \right| n \right\rangle}_{=0}e^{i\beta} - \right. \\ \left. - \underbrace{\left\langle n \left| \hat{C}^{+} \right| n \right\rangle}_{=0}e^{-i\beta}\right) = 0; \tag{5.20}$$

$$\Delta \mathrm{E} = \left\langle \varphi \left| \hat{E}^2 \right| \varphi \right\rangle = 2\left(\frac{2\pi \cdot \hbar\omega}{V} \right) \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega \cdot t + \varphi) \lim_{S\to\infty} (1+S)^{-1} \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{S} (n + \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \to \infty \,, \tag{5.21}$$

тобто середньоквадратична невизначеність амплітуди поля є нескінченною, що ілюструє рис. 5.1.

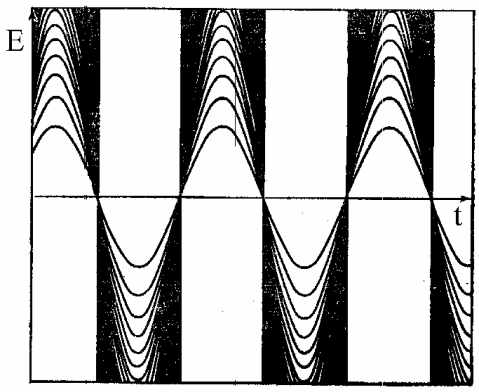


Рис. 5.1

<u>Стани з точно визначеною кількістю фотонів</u>

Для станів поля з точно визначеною кількістю фотонів невизначеність кількості фотонів дорівнює нулю: $\Delta n = 0$. Оскільки для знаходження фази необхідно вимірювати власні значення двох операторів $\cos\hat{\varphi}$ та $\sin\hat{\varphi}$, то знайдемо середньоквадратичні невизначеності вимірювання власних значень саме цих фазових операторів.

Отже:

$$\overline{\cos\varphi} = \left\langle n \left| \cos\hat{\varphi} \right| n \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle n \left| e^{i\hat{\varphi}} + e^{-i\hat{\varphi}} \right| n \right\rangle (=)$$

$$e^{i\hat{\varphi}} \left| n \right\rangle = \begin{cases} \left| n-1 \right\rangle, n \neq 0; \\ 0, n = 0; \end{cases}$$

$$e^{-i\hat{\varphi}}\left|n\right\rangle = \left|n+1\right\rangle;$$

$$(=)\frac{1}{2}\left\langle n\left|e^{i\hat{\varphi}}\right|n\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle n\left|e^{-i\hat{\varphi}}\right|n\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle n\middle|n-1\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle n\middle|n+1\right\rangle = 0, \qquad (5.22)$$

де $\left\langle n\middle|n-1\right\rangle = \left\langle n\middle|n+1\right\rangle = 0$ внаслідок ортогональності станів з різними n.

Аналогічно можна показати, що $\overline{\sin\varphi} = 0.$ Аналогічно для $\overline{\cos^2\varphi}$ та $\overline{\sin^2\varphi}$ отримаємо:

$$\overline{\cos^2\varphi} = \left\langle n\middle|\cos^2\hat{\varphi}\middle|n\right\rangle = \left\langle n\middle|\sin^2\hat{\varphi}\middle|n\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle n\middle|1+\cos 2\hat{\varphi}\middle|n\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left\langle n\middle|n\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle n\middle|\cos 2\hat{\varphi}\middle|n\right\rangle = \begin{cases}\frac{1}{2}, n \neq 0;\\ \frac{1}{4}, n = 0.\end{cases} \qquad (5.22')$$

А оскільки нас цікавлять передусім стани поля з ненульовими числами заповнення, то для них з (5.22) та (5.22') з врахуванням (5.15) отримаємо:

$$\Delta\cos\varphi = \Delta\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (5.23)$$

тобто невизначеність фази не залежить від кількості фотонів у моді (амплітуди або інтенсивності поля).

Тепер знайдемо середньоквадратичну невизначеність при вимірюванні напруженості електричного поля. Як було показано вище:

$$\hat{E} = i\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}\left[\hat{C}e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} - \hat{C}^{+}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right];$$

$$\hat{C}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \;;\; \hat{C}^{+}\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle.$$

А отже, звідси отримаємо:

$$\left\langle n\middle|\hat{E}\middle|n\right\rangle = i\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}(\underbrace{\left\langle n\middle|\hat{C}\middle|n\right\rangle e^{i\beta}}_{=0} - \underbrace{\left\langle n\middle|\hat{C}^{+}\middle|n\right\rangle e^{-i\beta}}_{=0}) = 0; \qquad (5.24)$$

$$\left\langle n\middle|\hat{E}^2\middle|n\right\rangle = -\frac{2\pi\hbar\omega}{V}(\left\langle n\middle|\hat{C}\hat{C}\middle|n\right\rangle e^{2i\beta} + \left\langle n\middle|\hat{C}^{+}\hat{C}^{+}\middle|n\right\rangle e^{-2i\beta} -$$

$$-\langle n|\hat{C}\hat{C}^{+}|n\rangle-\langle n|\hat{C}^{+}\hat{C}|n\rangle)=-\frac{2\pi\hbar\omega}{V}(\sqrt{n(n-1)}\underbrace{\langle n|n-2\rangle e^{2i\beta}}_{=0}+$$

$$+\sqrt{(n+1)(n+2)}\underbrace{\langle n|n+2\rangle e^{-2i\beta}}_{=0}-\sqrt{(n+1)^2}\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1}-\sqrt{n^2}\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1})= \qquad (5.25)$$

$$=\frac{4\pi\hbar\omega}{V}\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Отже для стану електромагнітного поля з точно визначеною кількістю фотонів:

$$\Delta\mathrm{E}=\left(\frac{4\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}, \qquad (5.26)$$

тобто зі збільшенням кількості фотонів середньоквадратична невизначеність $\Delta\mathrm{E}$ зростає як $\sqrt{n}$. Характер поля у станах з визначеною кількістю фотонів демонструє рис. 5.2.

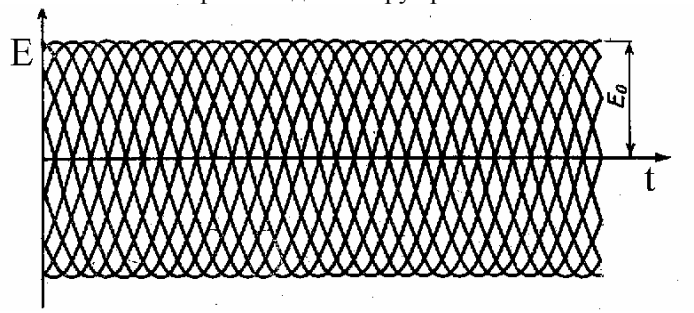


Рис. 5.2

Когерентні стани

Ні стани $|n\rangle$, ні $|\varphi\rangle$ не схожі на "благородну" синусоїду (класична електромагнітна хвиля зі сталою амплітудою та фіксованою фазою). Тому пошукаємо такі стани електромагнітного поля, які в наближенні великих амплітуд мають властивості, аналогічні класичній електромагнітній хвилі. Таким вимогам відповідають так звані когерентні стани $|\alpha\rangle$, введені Глаубером [19]. Характерна особливість таких станів полягає в тому, що з усіх квантових станів поле у когерентних станах $|\alpha\rangle$ є найближчим до класичної електромагнітної

хвилі у тому сенсі , що добуток невизначеностей фази і кількості фотонів набуває найменшого значення. Випромінювання у когерентному стані, наприклад, генерує неперервний лазер, що працює зі значним перевищенням порогу генерації.

Когерентні стани $|\alpha\rangle$ є проміжними між станами $|n\rangle$ і $|\varphi\rangle$, так як ні фаза ні амплітуда точно не визначені, але обидві величини характеризуються розподілами з найменшим добутком середньоквадратичних відхилень.

Уведемо стан $|\alpha\rangle$, як лінійну суперпозицію власних станів оператора кількості частинок:

$$|\alpha\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \ , \qquad (5.27)$$

де α – комплексні числа, n – цілі числа.

Властивості хвильових функцій $\langle\alpha|$, уведених у (5.27) є такими:

1. Хвильові функції, задані у такому вигляді, є нормованими:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}\alpha^n}{n!} \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} = 1 . \quad (5.28)$$

2. Два різні стани (стани з різними числами α та β) не є ортогональними:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{1/2(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}\beta^n}{n!} \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = e^{1/2(|\alpha|^2+|\beta|^2-\alpha^*\beta)} \text{, звідки}$$

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} . \qquad (5.29)$$

З (5.27) видно, що когерентних станів $|\alpha\rangle$ набагато більше ніж станів $|n\rangle$. Тому стани $|\alpha\rangle$ утворюють так званий переповнений набір станів для гармонічного осцилятора. Їх неортогональність – наслідок переповненості. Щоправда, неортогональність станів $|\alpha\rangle$ та $|\beta\rangle$ стає непомітною, якщо $|\alpha - \beta| >> 1$ (це випливає з (5.29)).

3. Когерентні стани є власними станами оператора знищення, оскільки

$$\hat{C}\left|\alpha\right\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\underbrace{\hat{C}\left|n\right\rangle}_{=\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle} = e^{-(1/2)|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\alpha^{n-1}}{((n-1)!)^{1/2}}\left|n-1\right\rangle =$$

$$= \left|n' = n-1\right| = \alpha\cdot e^{-(1/2)|\alpha|^2}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n'}}{(n'!)^{1/2}}\left|n'\right\rangle = \alpha\left|\alpha\right\rangle. \qquad (5.30)$$

Отже, комплексне число α, яким позначають когерентні стани, є власним значенням оператора знищення. Але стани $\left|\alpha\right\rangle$ не є власними станами для оператора народження $\hat{C}^+$:

$$\hat{C}^+\left|\alpha\right\rangle = \ldots = e^{-(1/2)|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle = \left|n' = n+1\right| =$$

$$= e^{-(1/2)|\alpha|^2}\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha^{n'-1}}{((n'-1)!)^{1/2}}\sqrt{n'}\left|n'\right\rangle = \frac{1}{\alpha}e^{-(1/2)|\alpha|^2}\underbrace{\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n'}}{(n'!)^{1/2}}n'\left|n'\right\rangle}_{\neq\left|\alpha\right\rangle}. \qquad (5.31)$$

Іноді йдуть беруть вираз (5.30) за визначення когерентного стану, а потім, як один із наслідків отримують вираз (5.27) для когерентного стану.

Крім виразу (5.27) використовують також інше представлення хвильової функції когерентного стану. Розглянемо стан із точно визначеною кількістю фотонів: $\left|n\right\rangle = (n!)^{-1/2}(\hat{C}^+)^n\left|0\right\rangle$, де $\left|0\right\rangle$ – стан електромагнітного вакууму, тобто стан поля при повній відсутності фотонів (при нульових числах заповнення усіх мод поля). Тоді виходячи з (5.27) отримаємо:

$$\left|\alpha\right\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}(n!)^{-1/2}(\hat{C}^+)^n\left|0\right\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\cdot\hat{C}^+)^n}{n!}\left|0\right\rangle =$$

$$= e^{(\alpha\cdot\hat{C}^+ - (1/2)|\alpha|^2)}\left|0\right\rangle\ . \qquad (5.32)$$

Тепер, нарешті, доведемо, що стани $\left|\alpha\right\rangle$, визначені в (5.27), є когерентними (тобто дають мінімум добутку невизначеностей фази і кількості фотонів). Для цього знайдемо середньоквадратичні

невизначеності Δn і $\Delta\cos\varphi$ у цьому стані. За означенням $\Delta n = \sqrt{\overline{n^2} - \overline{n}^2}$, де:

$$\overline{n} = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*n}\alpha^n}{n!}\langle n|\hat{n}|n\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}n =$$

$$= e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^2|\alpha|^{(n-1)^2}}{(n-1)!} = |n' = n-1| = |\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n'}}{n'!} =$$

$$= |\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2}e^{|\alpha|^2} = |\alpha|^2; \qquad (5.33)$$

$$\overline{n^2} = \langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*n}\alpha^n}{n!}\underbrace{\langle n|\hat{n}^2|n\rangle}_{n^2} = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}n^2 =$$

$$= e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{(n-1)!}n = |k = n-1| = |\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2k}}{k!}(k+1) =$$

$$= |\alpha|^2 + e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2k}}{k!}k = |m = k-1| = |\alpha|^2 + e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2m}}{m!} = \qquad (5.34)$$

$$= |\alpha|^2 + |\alpha|^4,$$

звідки отримаємо:

$$\Delta n = \sqrt{|\alpha|^2} = |\alpha| = \sqrt{\overline{n}}. \qquad (5.35)$$

Відповідно відносна невизначеність кількості фотонів:

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta n}{\overline{n}} = \frac{\sqrt{\overline{n}}}{\overline{n}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{n}}}. \qquad (5.36)$$

Звідси видно, що $|\alpha|^2$ є середньою кількістю фотонів у моді порожнини, а середньоквадратичне відхилення є коренем квадратним з середньої кількості фотонів. Відносна невизначеність числа фотонів $\sim\frac{1}{\sqrt{\overline{n}}}$ і зменшується зі збільшенням кількості фотонів у моді порожнини.

Знайдемо ймовірність того, що в стані $|\alpha\rangle$ знаходиться n фотонів:

$$W = \left|\langle n|\alpha\rangle\right|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = \frac{\overline{n}^n}{n!}e^{-\overline{n}}\ , \qquad (5.37)$$

тобто ми отримали розподіл Пуасона з середнім значенням $|\alpha|^2 = \overline{n}$. Середньоквадратична невизначеність кількості фотонів зростає як корінь із середньої кількості фотонів у моді: $\Delta n = \sqrt{\overline{n}}$.

Тепер розглянемо середньоквадратичну невизначеність фази: $\Delta\cos\varphi = \sqrt{\overline{\cos^2\varphi} - \overline{\cos\varphi}^2}$.Оскільки α - комплексне число, представимо його у вигляді: $\alpha = |\alpha|\cdot e^{i\theta}$. Отже:

$$\overline{\cos\varphi} = \langle\alpha|\cos\hat{\varphi}|\alpha\rangle(=)$$

$$e^{i\hat{\varphi}}|n\rangle = |n-1\rangle;\quad e^{-i\hat{\varphi}}|n\rangle = |n+1\rangle;$$

$$(=)|\alpha|\cos\theta\cdot e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}} = \ldots = \cos\theta\cdot\left(1-\frac{1}{8|\alpha|^2}+\ldots\right); \qquad (5.38)$$

$$\overline{\cos^2\varphi} = \langle\alpha|\cos^2\hat{\varphi}|\alpha\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-|\alpha|^2} + |\alpha|^2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)e^{-|\alpha|^2}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!\left[(n+1)(n+2)\right]^{1/2}} = \cos^2\theta - \frac{\cos^2\theta - \frac{1}{2}}{2|\alpha|^2} - \ldots \quad . \qquad (5.39)$$

Нас цікавлять когерентні стани з великими числами заповнення (електромагнітне поле в когерентному стані генерується лазером, який працює зі значним перевищенням порогу генерації). Звідси:

$$\Delta\cos\varphi = \sqrt{\cos^2\theta - \frac{\cos^2\theta - \frac{1}{2}}{2|\alpha|^2} - \cos^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{4|\alpha|^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4|\alpha|^2}(1-\cos^2\theta)} = \frac{\sin\theta}{2|\alpha|} = \frac{\sin\varphi}{2|\alpha|}\quad . \qquad (5.40)$$

Для когерентних станів з великими числами заповнення $\bar{n}\rangle\rangle 1$: $\sin\theta \approx \sin\varphi$. Отже добуток невизначеностей:

$$\Delta n \cdot \Delta \cos\varphi = |\alpha| \frac{|\sin\varphi|}{2|\alpha|} = \frac{\overline{|\sin\varphi|}}{2}. \qquad (5.41)$$

Оскільки комутатор операторів кількості фотонів і фази $[\hat{n}, \cos\hat{\varphi}] = -i\sin\hat{\varphi}$, то з (5.41) видно, що в когерентних станах добуток невизначеностей досягає мінімального значення. Таким чином стани, що визначаються співвідношенням (5.27) дійсно є когерентними станами.

Обчислимо очікуване середнє значення оператора електричного поля у когерентному стані:

$$\begin{aligned}
&\bar{E} = \langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle (=) \\
&\hat{C}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle; \quad \hat{C}^{+}|\alpha\rangle = \alpha^{*}|\alpha\rangle; \\
&\alpha = |\alpha| e^{i\theta}; \\
&(=) i\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2} \left[|\alpha| e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \theta)} - |\alpha| e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \theta)}\right] = \\
&= -2\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2} |\alpha| \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \theta).
\end{aligned} \qquad (5.42)$$

Аналогічно середнє значення квадрата напруженості електричного поля:

$$\overline{E^2} = \langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle = \left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)\left[4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \theta) + 1\right]. \qquad (5.43)$$

Отже, середньоквадратична невизначеність напруженості електричного поля:

$$\Delta \mathrm{E} = \sqrt{\overline{E^2} - \bar{E}^2} = \left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}. \qquad (5.44)$$

Слід звернути увагу на те, що ΔE не залежить від амплітуди поля. Відповідно, отримані результати застосовні до поля будь-якої амплітуди.

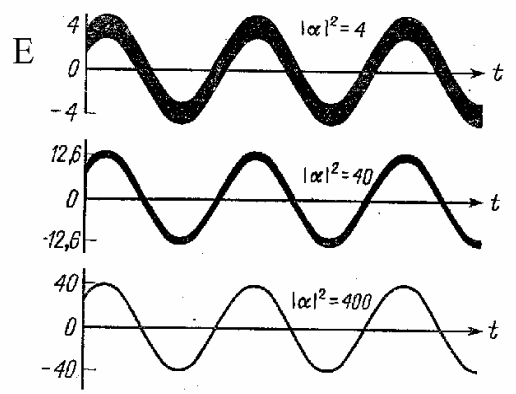


Рис. 5.3 Напруженість електричного поля представлена в одиницях $\left(2\pi\hbar\omega/V\right)^{1/2}$.

Всі квантовомеханічні невизначеності поля у когерентному стані прямують до нуля, коли $|\alpha|$>>1, тобто для великих чисел заповнення. Інші стани не мають класичних аналогів при n >> 1. Графічне представлення когерентних станів для різних значень чисел заповнення:

Стиснуті стани

Стиснутий стан електромагнітного поля – це один з когерентних станів поля, при якому середньоквадратична флуктуація (дисперсія) однієї з канонічно спряжених компонент поля (наприклад, кількості фотонів) менша, ніж у звичайному нетиснутому когерентному стані, в той час як дисперсія іншої спряженої компоненти (відповідно фази) – більша. Поняття стиснутого стану виникло в процесі вивчення (1960—70-ті рр.) статистичних характеристик випромінювання (долазерні експерименти з вивчення кореляцій інтенсивності) та детального дослідження незвичайних властивостей лазерного світла. Розрізняють стиснуті стани квадратурно-стиснуті та стани з придушеними флуктуаціями кількості фотонів або фази.

Для когерентного нетиснутого стану поля характерний пуасонівський розподіл фотонів $W_n = \dfrac{\overline{n}^n}{n!}e^{-\overline{n}}$ з дисперсією

$\sigma = \sqrt{n}$. У стані поля з меншою дисперсією флуктуацій інтенсивності, статистика фотовідліків згладжена у часі. У цьому випадку розподіл фотонів більш вузький, ніж пуасонівський, а таке поле називається субпуасонівським. Рівень шуму детектування випромінювання із субпуасонівською статистикою фотонів є нижчим за рівень дробового шуму. Тому використання полів із субпуасонівською статистикою становить інтерес для високочутливих й високоточних вимірів, в оптичному зв'язку та спектроскопії.

Схематичне представлення стиснутих станів на фазовій площині подано на рис. 5.4, де еліпсами зображено області невизначеності стиснутого стану. При відповідній орієнтації еліпса щодо регулярної складової поля є можливим зменшення як фазових (*в*), так і амплітудних (*г)* флуктуацій. У квантовій оптиці напруженість одномодового електричного поля описується оператором $\hat{E} = E_0 \left[\hat{X} \sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) + \hat{Y} \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) \right]$, де $\hat{X}$ та $\hat{Y}$ – так звані оператори квадратур:

$$\hat{X} = \left(\hat{C} + \hat{C}^+\right)/2 \ , \ \hat{Y} = \left(\hat{C} - \hat{C}^+\right)/2i \ , \qquad (5.45)$$

$E_0 = const$. Оператори квадратур задовольняють комутаційному співвідношенню $\left[\hat{X}, \hat{Y}\right] = i/2$, а їх дисперсії $\sigma_X^2 = \Delta X^2$, $\sigma_Y^2 = \Delta Y^2$ – співвідношенню невизначеностей

$$\sigma_X^2 \sigma_Y^2 \geq 1/16 \, . \qquad (5.46)$$

У когерентному й вакуумному станах $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1/4$. Крім станів стиснутих по амплітуді чи фазі існують також стани квадратурно стиснуті, в яких флуктуації однієї з квадратур, наприклад, $\sigma_X^2 < 1/4$, тоді як $\sigma_Y^2 > 1/4$, або, відповідно, навпаки. Поле у стиснутому стані є періодично нестаціонарним, оскільки для середньої інтенсивності поля у стиснутому стані маємо:

$$\overline{E^2} = \left[\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \left(\sigma_Y^2 - \sigma_X^2\right)\cos 2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right]/2 \ . \qquad (5.47)$$

Для реєстрації стиснутих станів оптичного випромінювання як правило використовується балансне гомодинне детектування (рис. 5.5). Стиснуте світло, якому відповідають оператори $\hat{C}$ і $\hat{C}^+$, змішується з

потужним когерентним випромінюванням гетеродина (оператори $\hat{B}$ і $\hat{B}^{+}$). Якщо на вході гетеродина випромінювання у стиснутому стані відсутнє, то дисперсія визначається вакуумними флуктуаціями. При цьому різницевий струм двох фотодетекторів, які вимірюють фотонні потоки у двох плечах, не залежить від фази випромінювання гетеродина. При подачі на змішувач випромінювання в стиснутому стані зменшується дробовий шум детектування, а різницевий струм двох детекторів починає залежати від фази випромінювання гетеродина.

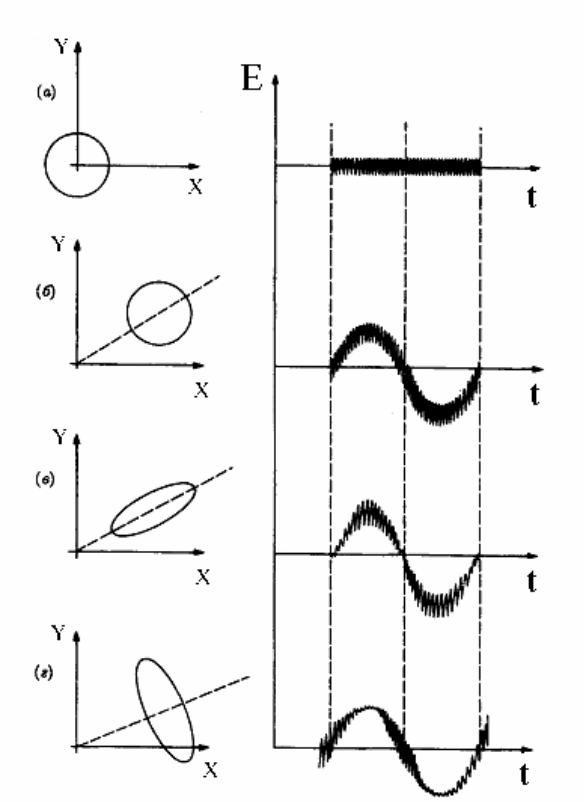


Рис. 5.4 Ілюстрація зв'язку між розподілом на фазовій площині і флуктуаціями електричного поля для: а – вакуумного стану; б – когерентного стану; в – стиснутого стану зі зменшеною фазовою

невизначеністю; г – стиснутого стану зі зменшеною амплітудною невизначеністю.

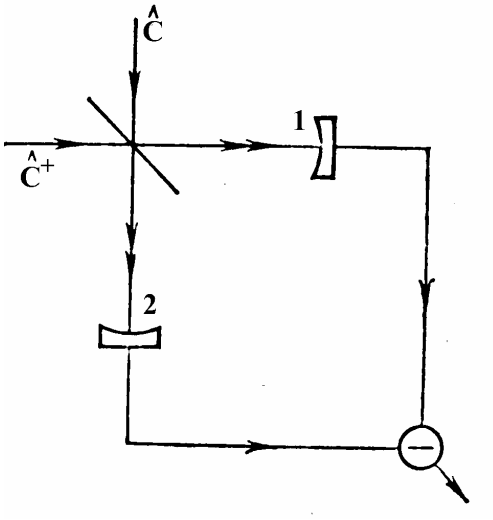


Рис. 5.5. Схема балансного гомодинного фотодетектування.

Методи отримання стиснутих станів базуються на нелінійних оптичних процесах. В оптиці такі стани можуть виникати у трьох- та чотирьохчастотних параметричних взаємодіях, при генерації вищих гармонік, у явищах самовпливу, при комбінаційному розсіянні, багатофотонних процесах й т. ін. Можливе також безпосереднє створення високостабільних лазерних джерел випромінювання, в яких придушення квантових флуктуацій здійснюється або придушенням шумів випромінювання гетеродина, або введенням негативного зворотнього зв'язку.

Яскравим підтвердженням існування квантових стиснутих станів є експеримент, схему якого наведено на рис. 5.6. Тут реалізовано колінеарну трьохфотонну параметричну взаємодію в оптичному резонаторі в допороговому режимі. Випромінювання накачки ($\lambda_{pump} = 0{,}53$ мкм), що являє собою другу гармоніку Nd:YAG лазера, потрапляє у резонатор, де генерується світло у стиснутому стані на довжині хвилі $\lambda_{sq} = 1{,}06$ мкм. Одночасно частина випромінювання Nd:YAG лазера з довжиною хвилі $\lambda = 1{,}06$ мкм

відщеплюється від основного пучка і змішується з випромінюванням у стиснутому стані в схемі балансного гомодинного детектування. Переміщенням одного з плоских дзеркал вноситься фазова затримка θ. Основний результат експерименту, що полягає в появі провалів під рівнем дробового шуму, представлено на рис. 5.7, де зображено залежність різницевого струму фотодіодів від фази гетеродина. Глибина провалів складає близько 50%.

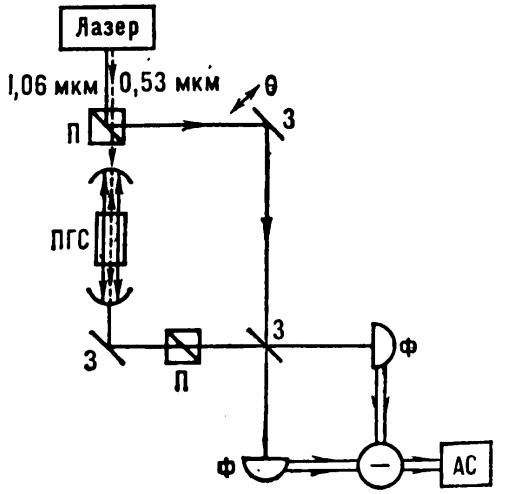


Рис. 5.6. Схема експерименту з генерації стиснутих станів. Тут: П — поляризатор; З — дзеркало; Ф — фотодіод; АС — аналізатор спектру; ПГС — параметричний генератор світла.

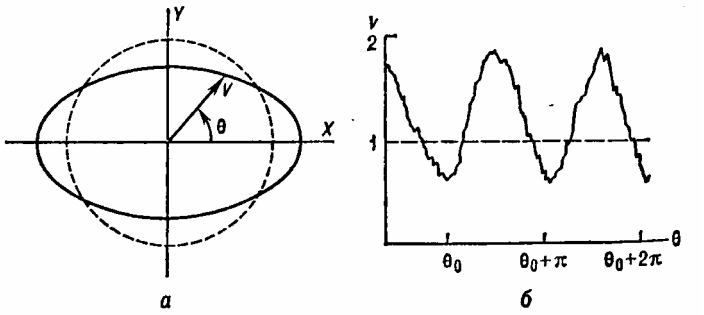


Рис. 5.7. Залежність різницевого фотоструму від фази гетеродина: *а* – область квантової невизначеності; *б* – результат експерименту.

Пунктирними лініями показано рівень дробового шуму і відповідний йому вакуумний стан (його область квантової невизначеності).

Групування, антигрупування фотонів. Пуасонівські та субпуасонівські фотонні поля.

Розглянемо часову кореляційну функцію другого порядку, яка вводиться таким чином:

$$g^{(2)}(\tau)=\frac{\left\langle \hat{a}^{+}(t)\hat{a}^{+}(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t)\right\rangle}{\left\langle \hat{a}^{+}(t)\hat{a}(t)\right\rangle^{2}} \ . \qquad (5.48)$$

Ця кореляційна функція описує ступінь скорельованості поля у два моменти часу, розділені між собою інтервалом τ. Ця функція може бути експериментально виміряна таким чином. При падінні світла на фотодетектор вимірюються кількості фотонів m_1 і m_2 за два короткі інтервали часу δt_1 і δt_2, розділені в часі проміжком τ. Якщо обидва інтервали мають однакову тривалість $\delta t_1 = \delta t_2 = \delta t$, меншу за τ, то кореляція $\langle m_1 m_2 \rangle$ являє собою ніщо інше як ступінь когерентності другого порядку $g^{(2)}(\tau)$ для світла в тій самій точці простору[1] (в точці знаходження фотодетектора), але в різні моменти часу. Тоді:

$$g^{(2)}(\tau)=\frac{\langle m_1 m_2 \rangle}{\overline{m}^{2}} \ , \qquad (5.49)$$

де $\overline{m}$ – середня кількість порахованих фотонів за час $\delta t_1 = \delta t_2 = \delta t$.

Для теплового та когерентного полів справедливим є співвідношення, очевидне з точки зору класичної електродинаміки:

$$g^{(2)}(\tau) \le g^{(2)}(0) \ , \qquad (5.50)$$

тобто ступінь скорельованості фотонного поля зменшується для теплового випромінювання або, відповідно, залишається сталим для когерентних полів при збільшенні часового розділення між моментами часу, що розглядаються. Якщо поле задовольняє нерівності $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ при $\tau < \tau_c$, де τ_c – час когерентності, то фотони демонструють надлишкову кореляцію на часах, менших

[1] Іноді вживають термін автокогерентність.

ніж τ_c. Це називається *групуванням фотонів,* оскільки фотони прагнуть розподілитися переважно по групах (у часі), а не випадковим чином. Коли таке світло падає на фотодетектор, фотонні пари з меншим інтервалом τ реєструються частіше, ніж фотонні пари з великим інтервалом (рис. 5.8 (*а*)). Прикладом поля, що демонструє явище групування фотонів, є поле теплового джерела.

У деяких квантових оптичних системах нерівність (5.50) може порушуватися, і ми отримуємо

$$g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0) . \qquad (5.51)$$

Цей результат відповідає явищу *антигрупування фотонів,* що є протилежним ефектом, при якому фотонні пари з меншим інтервалом реєструються рідше, ніж фотонні пари з великим інтервалом (рис. 5.8 (*в*)). Антигрупування фотонів у процесі резонансної флуоресценції атома буде розглянуто нижче.

Ще однією некласичною нерівністю є нерівність

$$g^{(2)}(0) < 1 . \qquad (5.52)$$

Нерівність (5.52) задовольняється для полів, функція розподілу яких вужча, ніж розподіл Пуасона. Такі поля називаються *субпуасонівськими.* Подібним чином, поля, для яких, $g^{(2)}(0) = 1$ та $g^{(2)}(0) > 1$ відповідно називаються *пуасонівськими* й *супер-пуасонівськими*. Поле у когерентному стані $|\alpha\rangle$, для якого $g^{(2)}(0) = 1$, є пуасонівським, а поле в стані з визначеним числом фотонів $|n\rangle$, для якого $g^{(2)}(0) = 1 - 1/n$, є субпуасонівським. Субпуасонівськими є також стиснуті стани поля.

Антигрупування фотонів при резонансній флуоресценції

Експерименти виявили, що розсіяне поле при резонансній флуоресценції[2] виявляє некласичну поведінку, пов'язану з антигрупуванням фотонів. У цьому випадку нормована кореляційна

[2] Явища резонансної флуоресценції та осциляцій Рабі, про які йтиметься нижче, розглянуто у додатку.

функція другого порядку $g^{(2)}(\tau)$ визначається таким виразом:

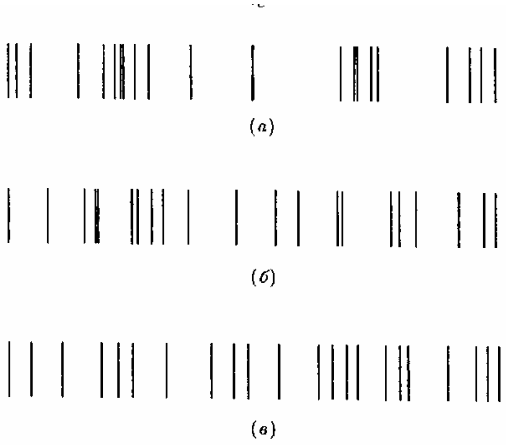


Рис. 5.8. Розподіл фотовідліків у часі у випадку: групування фотонів *(а),* пуасонівського розподілу фотонів *(б)* та антигрупування фотонів (*в*) у світлових пучках.

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \left(\cos \mu\tau + \frac{3\delta\omega}{4\mu} \sin \mu\tau \right) \exp\left(-\frac{4\delta\omega\tau}{4} \right), \quad (5.53)$$

де $\delta\omega$ – різниця частоти збуджуючого поля та внутрішньоатомної частоти, $\mu = \left(\Omega^2 - \delta\omega^2 / 16 \right)^{1/2}$, а Ω – частота Рабі. Видно, що $g^{(2)}(\tau) = 0$ для $\tau = 0$, і $g^{(2)}(\tau) > 0$ з ростом τ. Отже

$$g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0), \quad (5.54)$$

що відповідає явищу антигрупування фотонів (див. вираз (5.51)).

На рис. 5.9 подано величину $g^{(2)}(\tau)$ представлена як функцію часової затримки τ для різних значень нормованої частоти Рабі керуючого поля. У випадку слабкого керуючого поля ($\Omega << \delta\omega/4$) величина $g^{(2)}(\tau)$ зростає монотонно від 0 до 1 зі збільшенням τ. У випадку ж сильного керуючого поля, коли $\Omega >> \delta\omega/4$, величина $g^{(2)}(\tau)$ демонструє осциляційну залежність

від τ. Амплітуда цих осциляцій спадає з ростом τ, а функція $g^{(2)}(\tau)$ прямує до одиниці при $\tau \to \infty$.

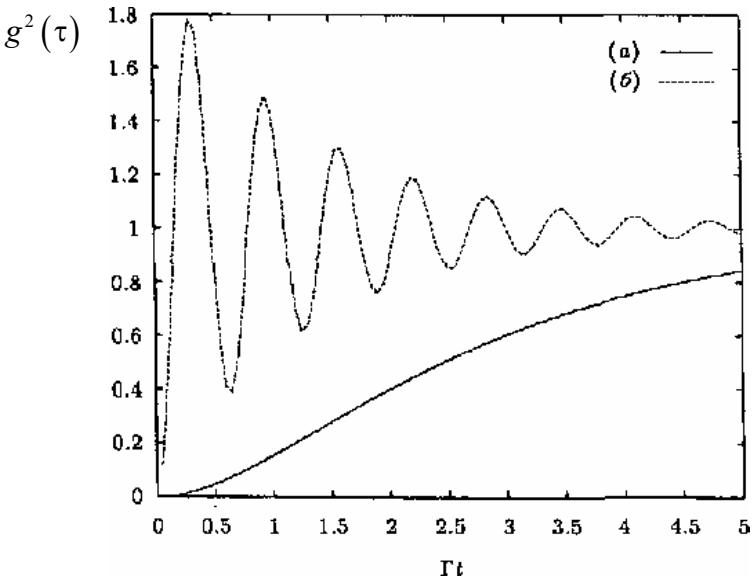


Рис. 5.9. Нормована кореляційна функція другого порядку $g^{(2)}(\tau)$ як функція безрозмірної затримки $\Gamma\tau$: $4\Omega/\delta\omega$ = 0.1 (*а*), $4\Omega/\delta\omega$ = 10 *(б)*.

Легко зрозуміти фізичну причину антигрупування фотонів при резонансній флуоресценції. Після випромінювання фотона атом повертається в основний стан, і для того, щоб знову перевести атом у збуджений стан, із якого може бути випущений наступний фотон, керуючому полю необхідний якийсь час. У середньому, ця затримка є порядку періоду Рабі Ω^{-1}, що можна бачити з виразу (5.53) у граничному випадку $\Omega >> \delta\omega/4$. Отже, спонтанно випромінені фотони демонструють тенденцію до антигрупування для малих часів затримок τ.

Біфотони

У нелінійній оптиці відомі процеси як генерації вищих гармонік при проходженні світла через нелінійнооптичні середовища, так і обернений процес генерації двох хвиль із приблизно рівними частотами $\omega_{1,2} = \omega_o / 2$, де ω_0 – частота лазерного пучка. Такий нелінійнооптичний процес називається спонтанною параметричною вниз-конверсією (СПВК). Виявляється, що народжені таким чином фотони можуть бути використані для "приготування" так званої "сплутаної" пари фотонів (англійською: entangled pair), яка має дуже цікаві властивості. Фотони у цій парі не є незалежними, а є сильно квантово скорельованими. Це проявляється таким чином: при зміні квантового стану одного з фотонів пари інший фотон відчуває ці зміни. Тому і кажуть, що така пара є "сплутаною". Пара фотонів поводить себе в оптичних експериментах (зокрема, таких як інтерференція та дифракція) не як два окремі фотони, а як єдина частинка, так званий *біфотон* [20]. Зокрема, така пара фотонів у цих експериментах проявляється як частинка, якій відповідає довжина хвилі $\lambda/2$, де λ – довжина хвилі, що відповідає окремому фотону пари.

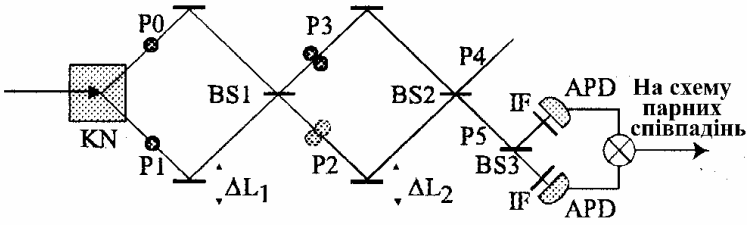


Рис. 5.10

Довжина хвилі "сплутаної" фотонної пари (біфотона) була виміряна в експерименті групи японських вчених (Едамацу, Шіміцу, Ітo) у 2001 році [21]. Схему експериментальної установки зображено на рис. 5.10. Пари фотонів генерувалися у процесі спонтанної параметричної вниз-конверсії у 5-міліметровому кристалі $KNbO_3$ (KN). Кристал накачувався другою гармонікою титан-сапфірового лазера ($\lambda/2 = 861{,}6/2$ нм). Пари фотонів із довжинами хвилі $\lambda = 861.6$ нм поширювалися вздовж двох оптичних шляхів P0 та P1, що було

реалізовано за допомогою двох маленьких круглих отворів в екрані. Далі пучки потрапляли в інтерферометр Маха-Цендера, який містив два розщіплювача пучка типу 50/50% BS1 та BS2. Біфотон генерується в одному з пліч інтерферометра коли пара вниз-конвертованих фотонів одночасно потрапляє на розщіплювач BS1. Одночасність забезпечується плавною зміною різниці ходу ΔL_1. Різниця довжин плеч інтерферометра ΔL_2 виставлялася з нанометровою точністю за допомогою п'єзоелектричного пристрою. Два біфотонні пучки зводилися на розщіплювачі BS2, а біфотонна інтерференція вимірювалася з одного з вихідних пліч (P5) розщіплювача BS2. Біфотонна інтерференційна картина записувалася за допомогою пристрою двофотонного детектування. Цей пристрій складається з розщіплювача пучка типу 50/50% BS3, двох лавинних фотодіодів (APD) та схеми парних співпадінь, яка спрацьовує тільки при одночасному попаданні фотонів на фотодіоди. Перед кожним фотодіодом ставився інтерференційний світлофільтр (IF), що пропускає світло з довжиною хвилі 860 нм, для того, щоб позбутися паразитної засвітки фотодіодів розсіяним світлом. За допомогою такої установки можна також було записувати однофотонні інтерференційні картини. Це здійснювалося шляхом перекриття одного з фотодіодів. Результати експериментів представлено на рис. 5.11. Верхня крива являє собою однофотонну інтерференційну картину, нижня – двофотонну. З рисунка чітко видно, що двофотонна картина характеризується вдвічі меншим періодом (приблизно 430 нм) порівняно з однофотонною (приблизно 860 нм). А це в свою чергу означає, що нижня крива відображає інтерференцію частинки, якій відповідає довжина хвилі, вдвічі менша, ніж довжина хвилі фотона, і такою частинкою є не що інше, як біфотон, який поводить себе в інтерференційному експерименті як єдина частинка.

Фотонні пари демонструють властивості "сплутаності" станів фотонів внаслідок нелокальності електромагнітного поля, тобто залежності характеристик поля (наприклад, напруженостей електричної та магнітної складових) у даній точці простору від значень цих величин в усіх інших точках простору. Саме ця нелокальність робить неможливим введення хвильової функції фотона в координатному представленні, про що йшлося у вступі та в розділі 1.

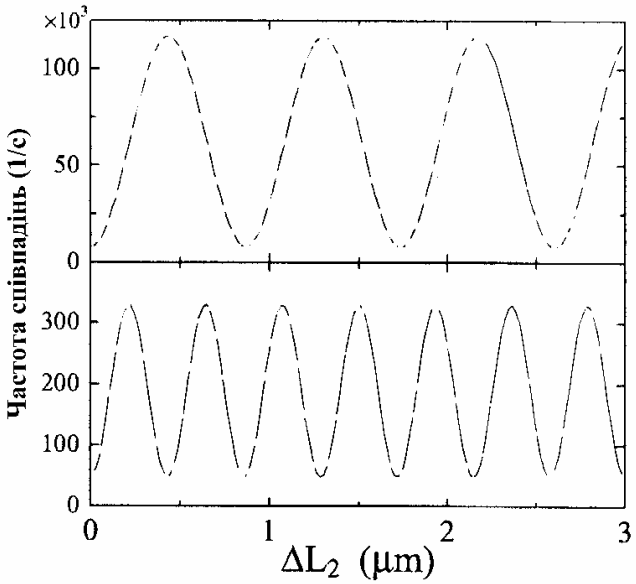


Рис. 5.11

РОЗДІЛ 6: Чисті та змішані стани квантованого поля випромінювання. Оператор густини

Кожній моді поля ми ставимо у відповідність квантовомеханічний осцилятор. Працювати будемо зі станами $\left|n_k\right\rangle$, в яких мода порожнини $\vec{k}$ містить n_k збуджених фотонів. Стани всього поля: $\left\{n_k\right\} = \left|n_{k_1}\right\rangle\left|n_{k_2}\right\rangle ... \left|n_{k_i}\right\rangle$. Немає ніяких підстав вважати, що електромагнітне поле реального світлового пучка є одним із станів $\left\{n_k\right\}$. Більш загальний випадок такий: стан поля описується деякою лінійною суперпозицією станів $\left\{n_k\right\}$.

<u>Чисті та змішані стани поля випромінювання</u>

До цього часу ми розглядали чисті стани, тобто стани, які можна виразити як певну лінійну комбінацію станів із визначеним числом фотонів $\left|n\right\rangle$. Узагальненням чистого стану на багато мод є добуток станів для окремих мод. Більш радикальне узагальнення потрібне для аналізу статистично змішаних станів поля випромінювання, коли немає точного визначеного стану поля, а є лише ймовірності спостереження можливих чистих станів. Чистий стан – частинний випадок статистичної суміші, тому й чисті, й змішані стани можна аналізувати в рамках однієї загальної схеми.

Розглянемо деяке електромагнітне поле в порожнині, для якого відома ймовірність P_R того, що поле знаходиться в стані $\left|R\right\rangle$, де R – у даному випадку індекс, що нумерує набір чистих станів. Для однієї моди поля в порожнині стани $\left|R\right\rangle$ можуть бути станами з певною кількістю фотонів $\left|n\right\rangle$, фазовими станами $\left|\varphi\right\rangle$, когерентними станами $\left|\alpha\right\rangle$, або ще якимись чистими станами. У випадку повного поля порожнини стани $\left|R\right\rangle$ можуть бути всіма можливими добутками одномодових станів, причому до кожного базового стану $\left|R\right\rangle$ входить по одному стану кожної моди порожнини. Наприклад, стани

$\{n_k\} = |n_{k_1}\rangle |n_{k_2}\rangle ... |n_{k_i}\rangle$ дають повний набір станів, побудований на основі одномодових станів з певною кількістю фотонів.

Стан поля, що характеризується ймовірностями P_R, є статистична суміш. Величини P_R для даного набору чистих станів $|R\rangle$ містять всю наявну інформацію про цей стан.

Приклади змішаних станів:

1. Хаотичний світловий пучок. Для такого пучка виключена можливість точно передбачити стан поля випромінювання. Опис на мові ймовірності єдино можливий, як у класичній, так і у квантовій теорії.
2. Теплове збудження фотонів у моді порожнини. Найбільш докладним описом, який можна дати в цьому випадку, є опис із використанням імовірності P_n збудження n фотонів при температурі T (тобто макростан визначається лише температурою T, він може бути реалізований різними способами з різними n). Імовірність P_n задається виразом:

$$P_n = e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right). \qquad (6.1)$$

Тоді середнє число фотонів, збуджених в моді поля при температурі, T дорівнює $\overline{n} = \sum_n nP_n$, або ж, як дає розподіл Бозе-Айнштайна:

$$\overline{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \qquad (6.2)$$

У загальному випадку результат експерименту, який можна провести зі світловими пучками, залежить від середнього за ансамблем значення деякої спостережуваної величини. Наприклад, для визначення величини флуктуації кількості фотонів в одній моді нам потрібно знати середні за ансамблем значення n та n^2.

За означенням:

$\overline{n} = \sum_n nP_n = (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}})\sum_n ne^{-\frac{\hbar\omega}{kT}n}$. Введемо позначення: $\alpha = \frac{\hbar\omega}{kT}$.

Тоді:

$$\sum_n n e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}n} = \sum_n n e^{-\alpha n} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_n e^{-\alpha n} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right) = \frac{e^{-\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)^2}\cdot$$

$$\overline{n} = \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{1}{e^{\alpha}-1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}.$$

Аналогічно для $\overline{n^2}$:

$$\overline{n^2} = \sum_n n^2 P_n = \left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)\sum_n n^2 e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}},$$

де $\sum_n n^2 e^{-\alpha n} = \sum \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-ne^{-\alpha}\right) = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\sum e^{-\alpha n} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right) =$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[-\frac{e^{-\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)^2} + 2\frac{e^{-2\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)^3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{n^2} = \left(1-e^{-\alpha}\right)\left[\frac{e^{-\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)^2} + 2\frac{e^{-2\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)^3}\right] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)} + 2\left(\frac{e^{-\alpha}}{\left(1-e^{-\alpha}\right)}\right)^2 = \overline{n} + 2\left(\overline{n}\right)^2 .$$

Тепер запишемо величину середньоквадратичної флуктуації кількості фотонів:

$$\Delta n = \sqrt{\overline{n^2} - \left(\overline{n}\right)^2} = \sqrt{\overline{n} + 2\left(\overline{n}\right)^2 - \left(\overline{n}\right)^2} = \sqrt{\overline{n} + \left(\overline{n}\right)^2} =$$

$$= \left\{\left(\overline{n}\right)^2 + \overline{n}\right\}^{1/2} = \overline{n}\left(1+\frac{1}{\overline{n}}\right)^{1/2} \approx \overline{n} + \frac{1}{2} \quad \text{, за умови } \overline{n} >> 1. \qquad (6.3)$$

Оператор густини

Розглянемо деяку спостережувану величину O, що визначається оператором $\hat{O}$. Для чистого стану $|R\rangle$ її середнє значення: $\overline{O} = \langle R|O|R\rangle$. Для статистичної суміші з розподілом ймовірності P_R середнє за ансамблем значення цієї величини:

$$\overline{O} = \sum_R P_R \langle R|O|R\rangle . \tag{6.4}$$

Будемо вважати, що $\sum_R P_R = 1$. Зручно записати (6.4) в іншій формі. Нехай $|S\rangle$ описує повній набір станів розглядуваного поля. Згідно умови повноти $\sum_S |S\rangle\langle S| = 1$ і тоді (6.4) можна записати так:

$$\overline{O} = \sum_R P_R \sum_S \langle R|O|S\rangle\langle S|R\rangle = \sum_R \sum_S P_R \langle S|R\rangle\langle R|O|S\rangle . \tag{6.5}$$

Уведемо оператор густини виразом: $\hat{\rho} = \sum_R P_R |R\rangle\langle R|$. Тоді середнє значення $\overline{O}$ можна подати у вигляді:

$$\overline{O} = \sum_S \langle S|\hat{\rho}\hat{O}|S\rangle . \tag{6.6}$$

Оператор густини містить точно таку саму інформацію, як і розподіл ймовірності P_R і є визначеним, якщо задано розподіл P_R для даного набору чистих станів $|R\rangle$.

Результат (6.6) не залежить від конкретного повного набору станів $|S\rangle$. Це можна довести безпосередньо, але це очевидно, враховуючи, що

$$\overline{O} = Sp\left(\hat{\rho}\hat{O}\right) \tag{6.7}$$

є слід матриці, а слід матриці є інваріантним щодо зміни базису. Результат (6.7) повністю еквівалентний (6.4).

Самі матричні елементи оператора $\hat{\rho}$ мають різні властивості для різних повних наборів станів. Наприклад, для набору $|R\rangle$, що використовується для побудови $\hat{\rho}$ відмінними від нуля є лише діагональні елементи:

$$\langle R'|\hat{\rho}|R''\rangle = \sum_R P_R \langle R'|R\rangle\langle R|R''\rangle = P_{R'}\delta_{R'R''}, \qquad (6.8)$$

тобто:

$$\sum_R P_R = 1, \quad \Rightarrow \quad Sp\ \hat{\rho} = 1 \qquad (6.9)$$

Для будь-якого стану поля випромінювання завжди існує деякий повний набір станів $|R\rangle$, для якого оператор густини має лише діагональні матричні елементи.

<u>Оператор густини для чистих станів поля</u>

Чисті стани можна розглядати, як частинний випадок статистичної суміші, коли одна з імовірностей $P_R = 1$, тоді всі інші тотожно рівні нулю. У цьому випадку:

$$\hat{\rho} = |R\rangle\langle R|, \qquad (6.10)$$

і статистичний опис стає зайвим. Але поняття оператора густини залишається справедливим і для чистих станів. Деякі його властивості зручно продемонструвати на чистих станах. Наприклад, лише для чистого стану $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, що прямо випливає з (6.10).

- ***Оператор густини для одномодових чистих станів поля***

1. Для поля в стані $|n\rangle$ із точно визначеною кількістю фотонів n: $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$. Єдиним матричним елементом матриці густини, відмінним від нуля, для цього стану є $\langle n|\hat{\rho}|n\rangle = 1$. Звідси середнє значення спостережуваної величини, що описується оператором $\hat{O}$:

$$\langle O\rangle = Sp\left(|n\rangle\langle n|\hat{O}\right) = \langle n|\hat{O}|n\rangle. \qquad (6.11)$$

Тобто маємо те, що й звичайно при обчисленні середнього значення.

2. Аналогічно для станів із визначеною фазою $\hat{\rho} = \left|\varphi\right\rangle\left\langle\varphi\right|$ та для когерентних станів $\hat{\rho} = \left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right|$.

Розглянемо більш детально останній, оскільки він представляє більший фізичний інтерес.
Для когерентного стану

$$\left\langle\alpha\,\middle|\,\alpha\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*n}\alpha^{n}}{(n!)} = 1, \quad \text{тому} \quad \left\langle\alpha\middle|\hat{\rho}\middle|\alpha\right\rangle = 1,$$

тобто схоже на $\left\langle n\middle|\hat{\rho}\middle|n\right\rangle = 1$. Але, оскільки для когерентних станів $\left\langle\alpha\middle|\beta\right\rangle \neq 0$, то $\left\langle\alpha\middle|\hat{\rho}\middle|\alpha\right\rangle$ не є єдиним матричним елементом оператора густини, відмінним від нуля.

• *Оператор густини для багатомодових чистих станів поля*

Для чистих станів повного поля випромінювання $\left|R\right\rangle$ є одним із станів $\left\{n_k\right\}$, тому оператор густини матиме вигляд: $\hat{\rho} = \left|\left\{n_k\right\}\right\rangle\left\langle\left\{n_k\right\}\right| = \left|n_{k_1}\right\rangle\left|n_{k_2}\right\rangle\left|n_{k_3}\right\rangle\ldots\left\langle n_{k_3}\right|\left\langle n_{k_2}\right|\left\langle n_{k_1}\right|$. Якщо має місце стан поля, де кожна мода знаходиться у когерентному стані, то стан поля $\left|\left\{\alpha_k\right\}\right\rangle = \left|\left\{\alpha_1\right\}\right\rangle\left|\left\{\alpha_2\right\}\right\rangle\ldots$, а відповідний оператор густини $\hat{\rho} = \left|\left\{\alpha_k\right\}\right\rangle\left\langle\left\{\alpha_k\right\}\right|$.

<u>Оператор густини для статистично змішаних станів поля</u>

Прикладом реалізації таких станів є теплове збудження фотонів в одну моду порожнини при температурі T. У цьому випадку ми повинні використати оператор густини, побудований на основі станів із певною кількістю фотонів:

$$\hat{\rho} = \sum_n P_n\left|n\right\rangle\left\langle n\right| = \left\{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right\}\sum_n e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}\left|n\right\rangle\left\langle n\right|. \qquad (6.12)$$

Такий оператор має відмінними від нуля лише діагональні матричні елементи. Обчислимо середнє значення напруженості електричного поля:

$$\overline{E} = \sum \langle n|\hat{\rho}\hat{E}|n\rangle = i\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2} \sum_n \left(\langle n|\hat{\rho}|n-1\rangle \sqrt{n} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} - \right.$$
$$\left. - \langle n|\hat{\rho}|n+1\rangle \sqrt{n+1} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right) \quad (6.13)$$

Якщо в першому доданку в дужках замінити n на $n+1$, то в результаті отримаємо:

$$\overline{E} = -2\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2} \sum_n \left\{ \sqrt{n+1}\, \mathrm{Im}\left\{ \langle n+1|\hat{\rho}|n\rangle \right\} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right\}. \quad (6.13')$$

Тобто $\overline{E} \neq 0$ тільки тоді, коли оператор густини має відмінні від нуля недіагональні матричні елементи $\langle n+1|\hat{\rho}|n\rangle$. Тобто середнє значення напруженості електричного поля завжди рівне нулю.

Оператор густини можна подати і так:

$$\hat{\rho} = \sum_n \frac{\overline{n}^n}{(1+\overline{n})^{n+1}} |n\rangle\langle n| . \quad (6.14)$$

Тепер розглянемо теплове збудження всіх мод порожнини. Оскільки у стані $|\{n_k\}\rangle$ всі моди – незалежні, то оператор густини матиме вигляд:

$$\hat{\rho} = \sum_{\{n_k\}} P_{\{n_k\}} |\{n_k\}\rangle\langle\{n_k\}| , \quad (6.15)$$

де $\{n_k\}$ – кількість фотонів у моді k. Тут: $P_{\{n_k\}} = \prod_k \frac{(\overline{n}_k)^{n_k}}{(1+\overline{n}_k)^{1+n_k}}$,

а отже:

$$\hat{\rho} = \sum_{\{n_k\}} |\{n_k\}\rangle\langle\{n_k\}| \prod_k \frac{(\overline{n}_k)^{n_k}}{(1+\overline{n}_k)^{1+n_k}} . \quad (6.16)$$

<u>Матриця густини для опису поляризації фотона</u>

Як відзначалося у Розділі 1, стан фотона з визначеним імпульсом (заданим $\vec{p}$) характеризується одиничним вектором поляризації $\vec{e}$, який можна розкласти по двом взаємно ортогональним ортам $\vec{e}^{(1)}$ та $\vec{e}^{(2)}$, які визначають “чисті стани” поляризації

$$\vec{e} = a_1\vec{e}^{(1)} + a_2\vec{e}^{(2)}, \qquad (6.17)$$

причому величини $\vec{e}^{(\mu)}$, де $\mu = 1,2$, разом із заданим $\vec{p}$ утворюють повний набір квантових чисел фотона, а система функцій $f_{\vec{p}\mu}(\vec{k},t)$ є повна ортонормована система, по якій можна розкласти довільну хвильову функцію фотона. При цьому можливі ситуації, коли фотону не можна приписати певну хвильову функцію. Наприклад, після розсіяння фотона електроном існує лише хвильова функція системи фотон-електрон, в розкладі якої по хвильовим функціям вільного фотона міститься домішка хвильової функції вільного електрона.

Розглянемо тепер випадок, коли імпульс фотона визначено, але стан поляризації не може бути зафіксований певним чином, оскільки коефіцієнти a_1 і a_2 (або α і β) залежать від параметрів, що характеризують іншу систему. Такий стан поляризації фотона називають *змішаним* або станом *часткової поляризації*. Його як і всі змішані стани можна описати за допомогою матриці густини, у нашому випадку розмірністю 2x2

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \qquad (6.18)$$

з елементами

$$\rho_{\mu\nu} = \overline{a_\mu a_\nu^*}, \qquad (6.19)$$

де усереднення здійснюється за параметрами, що характеризують іншу систему. Цю матрицю називають *поляризаційною матрицею густини*. Вона є ермітова ($\rho_{\mu\nu} = \rho_{\nu\mu}^*$) і її слід з умови нормування є $Sp(\hat{\rho}) = \rho_{11} + \rho_{22}$. Таким чином елементи матриці густини визначаються трьома дійсними параметрами і її можна подати у вигляді

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix} \qquad (6.20)$$

Три дійсні величини ξ_j є не що інше як добре відомі в поляризаційній оптиці нормовані *параметри Стокса*, які використовують для опису

частково поляризованого світла[1]. Їх можна виміряти експериментально. Так величина параметру ξ_3 визначається ймовірністю лінійної поляризації вздовж осі *x*

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}(1 + \xi_3). \qquad (6.21)$$

Для його знаходження необхідно на шляху досліджуваного пучка світла (потоку досліджуваних фотонів) поставити лінійний поляризатор, площина пропускання якого паралельна осі x, і виміряти інтенсивність світла, що пройшло. Параметр ξ_1 визначається ймовірністю лінійної поляризації вздовж напрямку, що утворює кут $\pi/4$ щодо осі *x* (в експерименті це відповідає вимірюванню інтенсивності за лінійним поляризатором, площина пропускання якого паралельна бісектрисі кута між напрямками *x* та *y*). Відповідне ортогональне перетворення до нового базису є

$$\vec{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^{(1)'} - \vec{e}^{(2)'}) \quad \text{та} \quad \vec{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^{(1)'} + \vec{e}^{(2)'}). \qquad (6.22)$$

---

[1] Чотири параметри S_0, S_1, S_2, S_3 було введено Дж. Стоксом (J.Stokes) в 1852 р. Всі параметри Стокса мають розмірність інтенсивності (густини потоку), причому S_0 є повна інтенсивність пучка, а інші параметри S_1, S_2, S_3, які показують переважання в цьому пучку однієї з двох чистих ортогональних поляризацій: S_1 - лінійних вдовж *x* або *y*; S_2 - лінійних вдовж ортогональних напрямків, які складають кут $\pi/4$ щодо попередніх; S_3 - правої або лівої кругових. Для опису лише стану поляризації пучка достатньо задати тільки 3 параметри S_1, S_2, S_3, які нормують на повну інтенсивність пучка S_0, отримуючи *нормовані параметри Стокса* s_1, s_2, s_3 (див., наприклад: М.Борн, Э.Вольф, Основы оптики, «Наука», Москва, 1970). В квантовій електродинаміці для них прийняті позначення ξ_1, ξ_2, ξ_3 і їх називають просто параметри Стокса.

Спроектувавши вектор поляризації $\vec{e}^{(1)}$ досліджуваного пучка на новий базис $\vec{e}^{(1)'}, \vec{e}^{(2)'}$, повернутий на кут $\pi/4$ щодо базису $\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}$, отримаємо

$$\vec{e} = a_1'\vec{e}^{(1)'} + a_2'\vec{e}^{(2)'}. \tag{6.23}$$

Матриця густини для нового базису є

$$\rho'_{\mu\nu} = \overline{a'_\mu a'^*_\nu}, \tag{6.24}$$

а ймовірність лінійної поляризації вздовж напрямку $\vec{e}^{(1)'}$ є:

$$\rho'_{11} = \overline{a'_1 a'^*_1} \tag{6.25}$$

Для знаходження величин a_1' та a_2' запишемо

$$\begin{aligned}\vec{e} = a_1\vec{e}^{(1)} + a_2\vec{e}^{(2)} = a_1\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^{(1)'} - \vec{e}^{(2)'}) + a_2\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^{(1)'} + \vec{e}^{(2)'}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2)\vec{e}^{(1)'} + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2)\vec{e}^{(2)'} = a_1'\vec{e}^{(1)'} + a_2'\vec{e}^{(2)}\end{aligned} \tag{6.26}$$

Отже

$$a_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2) \tag{6.27}$$

і

$$\rho'_{11} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2)^*} = \frac{1}{2}(\overline{a_1 a_1^*} + \overline{a_2 a_2^*} + \overline{a_1 a_2^*} + \overline{a_2 a_1^*}), \tag{6.28}$$

звідки з врахуванням (6.19) та (6.20) остаточно отримаємо

$$\rho'_{11} = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{12} + \rho_{21}) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1). \tag{6.29}$$

Для знаходження в такий самий спосіб параметра ξ_2 запишемо зв'язок між ортами лінійного базису $\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}$ та циркулярного базису $\vec{e}^{(1)''}, \vec{e}^{(2)''}$, що відповідає двом взаємно ортогонально поляризованим станам циркулярної поляризації

$$\vec{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^{(1)''} - \vec{e}^{(2)''}) \quad \text{та} \quad \vec{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\vec{e}^{(1)''} - \vec{e}^{(2)''}). \tag{6.30}$$

Ймовірність циркулярної поляризації $\vec{e}^{(1)''}$ (правої циркулярної поляризації) знайдемо як елемент матриці густини

$$\rho''_{11} = \overline{a''_1 a''^{*}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - ia_2) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{*} + a_2^{*}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{a_1 a_1^{*}} + \overline{a_2 a_2^{*}} + \overline{ia_1 a_2^{*}} - \overline{ia_2 a_1^{*}}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} + i\rho_{12} - i\rho_{21}) = \frac{1}{2}[1 + i(\rho_{12} - \rho_{21})] = \frac{1}{2}(1 + \xi_2). \quad (6.31)$$

Ймовірність ортогональної лівої циркулярної поляризації є $\frac{1}{2}(1 - \xi_2)$.

Повна права циркулярна поляризація досягається при $\xi_2 = +1$, а повна ліва циркулярна поляризація при $\xi_2 = -1$. Оскільки ці дві поляризації відповідають двом значенням спіральності $\lambda = \pm 1$, то ясно, що в загальному випадку ξ_2 є середнє значення спіральності фотона.

Таким чином, для визначення стану поляризації пучка фотонів необхідно виміряти інтенсивність, що створюється цим пучком за лінійним аналізатором при двох положеннях його площини пропускання, кут між якими становить 45°, а також інтенсивність, що створюється цим пучком за циркулярним аналізатором[2].

Оскільки величини ймовірностей ρ_{11}, ρ'_{11} та ρ''_{11}, мають бути додатні і не більші за одиницю, з отриманих виразів для ξ_1, ξ_2, ξ_3 випливає, що $|\xi_i| \le 1$,

Крім того, з (6.19) та (6.20) можна отримати

$$\det \hat{\rho} = \frac{1}{4}(1 - \xi^2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = \overline{|a_1|^2}\,\overline{|a_2|^2} - \overline{(a_1 a_2^{*})}\,\overline{(a_2 a_1^{*})} \ge 0 \quad (6.32)$$

---

[2] Циркулярним аналізатором може бути так звана чвертьхвильова фазова пластинка, що створює фазовий зсув $\pi/4$ між ортогональними лінійно поляризованими хвилями, та розміщений за нею лінійний поляризатор, площина пропускання якого складає кут 45° з головними напрямками пластинки.

Отже

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \le 1 . \qquad (6.33)$$

Таким чином, всі три параметри Стокса можуть мати значення між -1 та +1.

Якщо $\xi_i = 0$, то маємо повністю *неполяризоване* світло. При цьому ймовірність будь якої чистої поляризації є $\frac{1}{2}$.

При $\xi^2 = 1$ параметри Стокса можна ξ_i подати у вигляді[3]

$$\xi_3 = \cos 2\alpha \,,\ \xi_1 = \sin 2\alpha \cos\beta \,,\ \xi_2 = \sin 2\alpha \sin\beta \,. \qquad (6.34)$$

При таких значеннях параметрів Стокса матриця $\hat{\rho}$ співпадає з матрицею густини побудованою на основі загального виразу для чистого стану (6.10) із застосуванням (6.19). Отже рівність $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ відповідає повністю поляризованому світлу, а матриця $\hat{\rho}$ з такими параметрами Стокса описує чистий стан поляризації. Матрицю $\hat{\rho}$ (6.20) можна також подати у вигляді

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{1} + \sum_{j=1}^{3} \xi_j \hat{\sigma}_j \right) \qquad (6.35)$$

де $\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ці матриці утворюють повну систему лінійно незалежних двовимірних матриць, де матриці $\hat{\sigma}_j$ є матриці Паулі.

Три параметри Стокса ξ_j можна легко обчислити за відомою матрицею густини $\hat{\rho}$

$$\xi_j = Sp(\hat{\rho}\hat{\sigma}_j) . \qquad (6.36)$$

---

[3] Зауважимо, що запис параметрів Стокса у формі (6.34) дає можливість унаочнити можливі стани поляризації за допомогою елегантної геометричної побудови: так званої сфери Пуанкаре (див,, наприклад: М.Борн, Э.Вольф, Основы оптики, «Наука», Москва, 1970).

Таким чином, параметри Стокса можуть бути знайдені за відомою матрицею густини $\hat{\rho}$ як середні значення відповідних матриць Паулі.

Матрицю густини $\hat{\rho}$ при частковій поляризації можна розглядати як лінійну комбінацію двох матриць густини, що відповідають повністю неполяризованому і повністю поляризованому станам

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(1-P) + \frac{1}{2}P(1+\hat{\sigma}\hat{\eta}), \qquad (6.37)$$

де $\hat{\eta}$ вводиться співвідношеннями $\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2=1$ та $\xi_j = P\eta_j$. Безрозмірну величину P називають *ступенем поляризації фотона*. P змінюється в межах від 0 для повністю неполяризованого стану фотона до 1 для повністю поляризованого стану фотона; $P=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$. Таким чином при заданому ступені поляризації внесок повністю поляризованого стану може бути представлений будь-якими чистими станами, що характеризуються величинами ξ_j аби тільки сума їх квадратів відповідала заданому ступеню поляризації.

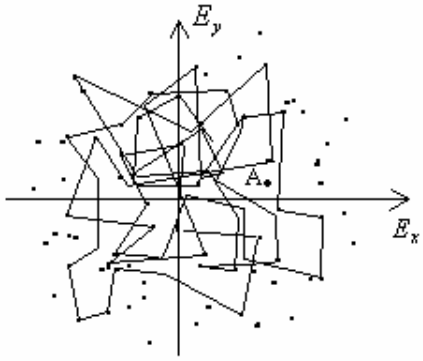


Рис. 6.1

Неполяризованому світлу на відміну від поляризованого не може бути поставлена у відповідність замкнена траєкторія проекції кінця вектора $\vec{E}$ (в загальному випадку еліптична). Якщо на фазовій площині E_x, E_y проекції кінців вектора $\vec{E}$ неполяризованого світла через малі однакові проміжки часу зображати точками, а потім з'єднати їх ламаною лінією, то отримаємо приблизно таку картину як

зображено на Рис. 6.1. Принципова відмінність від фазового портрету поляризованого світла полягає в тому, що траєкторія проекції кінця вектора $\vec{E}$ з плином часу може наближатись як завгодно близько до довільної точки А фазової площини, чого принципово не може бути у випадку замкнених траєкторій, що відповідають поляризованому світлу.

РОЗДІЛ 7: Фотодетектування. Лічба фотонів

У цьому розділі ми розглянемо фотодетектування. Нехай маємо світловий пучок (потік фотонів). Задача полягає в тому, щоб визначити середню інтенсивність пучка, тобто середню кількість фотонів за деякий час T (час реєстрації) значно більший за час когерентності, тобто за тривалість акта випромінювання). Для цього пучок спрямовується на фотодетектор (наприклад, фотоелектронний помножувач (ФЕП)). Режим роботи фотодектора обирають таким чином, щоб кожному фотоелектрону на виході фотодетектора відповідав імпульс струму. Кількість імпульсів струму, які виникають внаслідок фотоефекту, підраховують лічильником імпульсів. Такий метод реєстрації називають методом лічби фотонів. Кількість імпульсів m підрахованих лічильником пропорційна кількості фотонів n, що падають на фотодетектор і дорівнює їй, якщо квантова ефективність фотодетектора дорівнює одиниці, тобто $m = \varsigma n$, де ς – квантова ефективність фотодетектора (імовірність того, що один фотон „народжує" один імпульс фотоструму). Нехай у вимірювальній схемі реалізовано електронний затвор, який відкривається в деякий момент часу t, далі протягом часу вимірювання T він відкритий, а потім він закривається. Наступне відкривання затвора відбувається через проміжок часу, більший за час когерентності. Для того щоб кількість відліків можна було коректно усереднити, вона має бути досить великою (як правило ~ 100–1000). Кількість m підрахованих за час T імпульсів фотоструму (фотовідліків) розподілена за певним законом, а ймовірність того, що за час T буде нараховано саме m імпульсів $P_m(T)$ підлягає певній закономірності, а саме:

$$P_m\left(T\right) = \left\langle P_m\left(t,T\right) = \left\langle \frac{\left(\overline{m}\left(t,T\right)\right)^m}{m!} \exp\left(-\overline{m}\left(t,T\right)\right) \right\rangle \right\rangle . \quad (7.1)$$

$m\left(t,T\right)$ – кількість фотовідліків за час реєстрації T за умови, що реєстрація почалася у момент часу t. Знаком $\langle\ \rangle$ тут позначено усереднення за моментами часу початку вимірів, $\overline{m}(t,T)$ – кількість фотовідліків, усереднена за тривалістю часу реєстрації T.

Розподіл кількості фотонів для когерентного й хаотичного світла.

Спочатку розглянемо найпростіший випадок, коли $\overline{m}$ не залежить ні від t, ні від T. У цьому випадку:

$$\overline{m} = const \ , \tag{7.2}$$

а отже, функція розподілу $P_m(T)$ має вигляд:

$$P_m(T) = \frac{\overline{m}^m}{m!} \exp(-\overline{m}). \tag{7.3}$$

Отже, для функції розподілу кількості фотонів ми отримали розподіл Пуассона, так само як і для функції розподілу фотонів однієї моди в когерентному стані. Таким чином, (7.3) дає функцію розподілу кількості фотовідліків для пучка фотонів у когерентному стані. У цьому випадку в усіх співвідношеннях для когерентних станів ми можемо замінити $|\alpha|^2$ на $\overline{m}$, що є пропорційним середній кількості фотонів $\overline{n}$ (див. співвідношення (5.34)). Тому середньоквадратична флуктуація кількості фотовідліків (див. (5.36)):

$$\Delta m = \sqrt{\overline{m}} \ . \tag{7.4}$$

На рис. 7.1 зображено функцію розподілу $P_m(T)$ для різних m. Флуктуації у пучку постійної середньої інтенсивності називаються флуктуаціями кількості частинок. Вони зумовлені дискретною (квантовою) природою електромагнітного поля, яке складається з квантів-фотонів. У результаті цього, енергію зі світлового пучка можна забрати тільки дискретно, тобто у вигляді певної кількості фотонів. Ці флуктуації є невід'ємною властивістю процесу фотодетектування.

Тепер розглянемо розподіл кількості фотонів для хаотичного світла. Якщо час реєстрації набагато більший за час когерентності ($T >> \tau_c$), то тоді, очевидно $\overline{m}(t,T)$ не залежить від t, оскільки всі флуктуації усереднюються за великий час T, і ми отримаємо пуасонівський розподіл (7.3). Якщо ж має місце протилежна ситуація, тобто $T << \tau_c$, то тоді, як показано у розділі 6 (співвідношення (6.14)):

$$P_m(T) = \frac{\overline{m}^m}{(1+\overline{m})^{1+m}} \ . \tag{7.5}$$

Ця функція розподілу подібна до функції розподілу кількості фотонів в одній моді теплового випромінювання. Якщо ж має місце проміжна

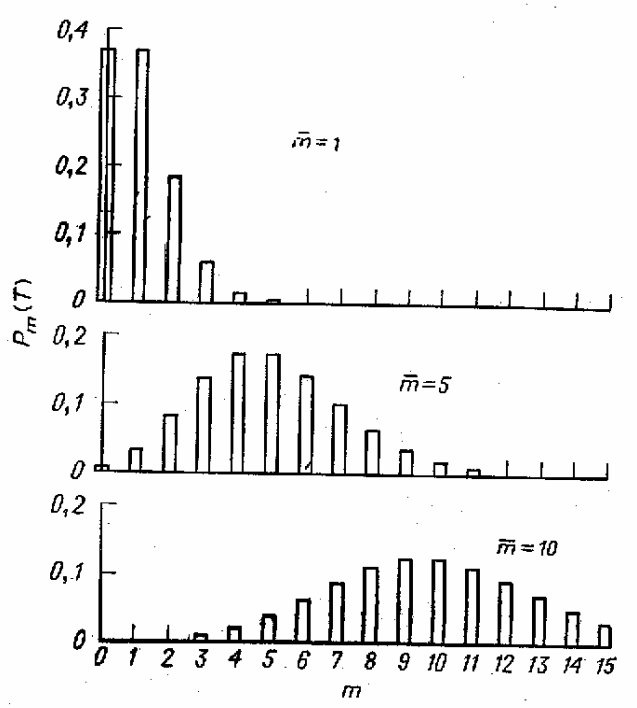


Рис. 7.1

ситуація $T \approx \tau_c$, то тоді аналітично описати залежність $P_m(T)$ неможливо. На рис. 7.2 представлено вигляд цієї залежності для різних значень відношення T/τ_c. У загальному випадку вираз для середньоквадратичної флуктуації кількості фотовідліків має вигляд:

$$\Delta m = \sqrt{\bar{m} + \left(\left\langle m^2(t,T) \right\rangle - \left\langle m(t,T) \right\rangle^2 \right)} \quad . \qquad (7.6)$$

Перший член під коренем – це флуктуації частинок. Другий член називається хвильовими флуктуаціями. Світлові пучки як раз і відрізняються величиною хвильових флуктуацій, які часто є проявом властивостей елементарних випромінювачів, які генерують даний пучок (атомів, молекул).

У випадку хаотичного світла з лоренцівським спектральним контуром, де спектральна півширина зв'язана з часом когерентності як $\gamma = 1/\tau_c$, середньоквадратична флуктуація фотовідліків:

$$\Delta m = \sqrt{\overline{m} + \frac{\overline{m}^2}{2\gamma^2 T^2}\left[\exp(-2\gamma T) - 1 + 2\gamma T\right]} \ . \qquad (7.7)$$

У випадку $T >> \tau_k$, тобто $\gamma T >> 1$:

$$\Delta m = \sqrt{\overline{m}} \ , \qquad (7.8)$$

як і очікувалось. А при $T << \tau_c$ ($\gamma T << 1$):

$$\Delta m = \sqrt{\overline{m^2} - \overline{m}^2} \ . \qquad (7.9)$$

З (7.7) випливає, що величина Δm спадає при зростанні часу виміру T, як видно з рис. 7.3.

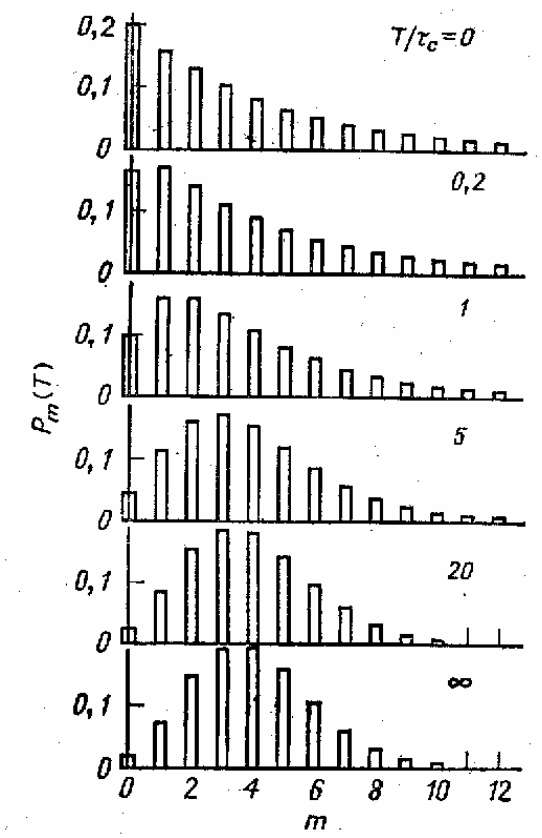


Рис. 7.2

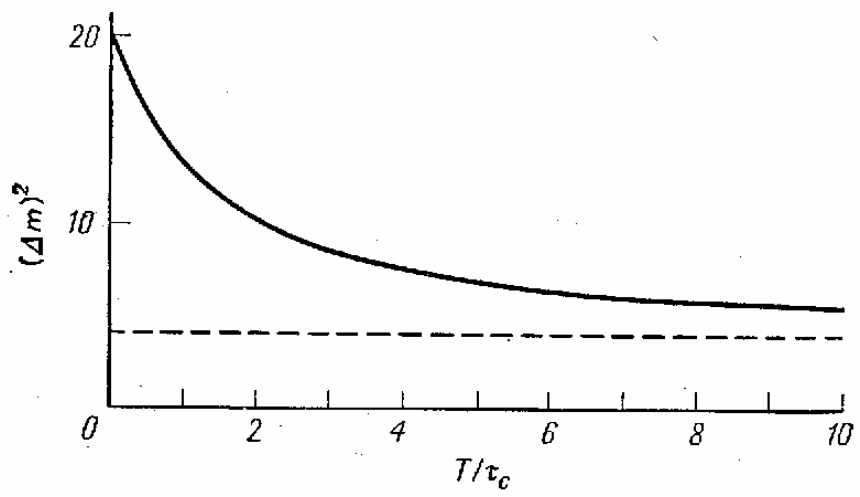


Рис. 7.3

<u>Часова спектроскопія.</u>

Методи звичайної оптичної спектроскопії, якими отримують спектри $I(\omega)$, дозволять розділяти лінії зі спектральною півшириною 10^{10} Гц і більше. Інтерференційна спектроскопія Фабрі-Перо дозволяє розділяти спектральні лінії з півшириною 10^7–10^{12} Гц. Проте часто півширина ліній є меншою ніж 10^7 Гц. У цьому випадку використовують спектроскопію часового розділення.

Перший метод базується на експериментальному вимірюванні функції розподілу фотовідліків. Як видно з рис.7.2 , форма залежності $P_m(T)$ чутлива до величини часу когерентності коли $T \sim \tau_c$. Таким чином, спочатку проводяться вимірювання залежності $P_m(T)$ для різних T. Далі при великих T, коли форма $P_m(T)$ не залежить від T, визначають $\overline{m}$, потім апроксимують експериментальні залежності $P_m(T)$ для різних T теоретично розрахованими кривими, звідки знаходять T/τ_c. А оскільки T – величина відома, звідси знаходять τ_c, а потім і величину $\gamma = 1/\tau_c$.

Існують також інші методи спектроскопії часового розділення – так звані кореляційні методи.

Розглянемо кореляційну функцію першого порядку, яка визначається зкорельованістю (когерентністю) поля в даній точці простору в різні моменти часу t_1 та t_2:

$$g^{(1)}\left(t_1,t_2\right)\equiv g^{(1)}=\frac{\left|\left\langle E\left(t_1\right)E^{*}\left(t_2\right)\right\rangle\right|}{\left|\left\langle E\left(t_1\right)E^{*}\left(t_1\right)\right\rangle\left\langle E^{*}\left(t_2\right)E\left(t_2\right)\right\rangle\right|^{1/2}}\ . \quad (7.14)$$

Усереднення проводять за час реєстрації. Вводять також кореляційну функцію другого порядку[1]:

$$g^{(2)}\left(t_1,t_2\right)\equiv g^{(2)}=\frac{\left\langle E\left(t_1\right)E\left(t_2\right)\right\rangle\left\langle E^{*}\left(t_1\right)E^{*}\left(t_2\right)\right\rangle}{\left\langle E\left(t_1\right)E^{*}\left(t_1\right)\right\rangle\left\langle E^{*}\left(t_2\right)E\left(t_2\right)\right\rangle}\ . \quad (7.15)$$

У кореляційних методах γ та τ_c визначають з вимірювань кореляційних функцій другого порядку. При падінні світла на фотодетектор вимірюється кореляція між кількістю фотонів m_1 і m_2 за два короткі інтервали часу δt_1 і δt_2, розділені в часі проміжком τ. Якщо обидва інтервали мають однакову тривалість $\delta t_1=\delta t_2=\delta t$, меншу ніж τ та час когерентності τ_c, то кореляція $\left\langle m_1m_2\right\rangle$ являє собою ніщо інше як ступінь когерентності другого порядку $g^{(2)}$ для світла в тій самій точці простору (в точці знаходження фотодетектора), але в різні моменти часу. Тоді:

$$g^{(2)}=\frac{\left\langle m_1m_2\right\rangle}{\overline{m}^2}\ , \quad (7.16)$$

де $\overline{m}$ – середня кількість порахованих фотонів за час $\delta t_1=\delta t_2=\delta t$. Для спектральних ліній, які мають лоренцівський спектральний контур:

$$\left\langle m_1m_2\right\rangle=\overline{m}^2\left(1+\exp\left[-2\gamma\tau\right]\right)\ , \quad (7.17)$$

а отже для кореляційної функції маємо

$$g^{(2)}=\left(1+\exp\left[-2\gamma\tau\right]\right)\ . \quad (7.18)$$

Отже експериментально виміряна кореляційна функція другого порядку визначена за виразом (7.16), апроксимується функцією (7.18),

[1] Кореляційна функція другого порядку вимірювалась в дослідах Брауна-Твіса (так звана інтерференція інтенсивності).

звідки знаходяться γ та τ_c. У випадку гаусівської форми спектральної лінії маємо:

$$\langle m_1 m_2 \rangle = \bar{m}^2 \left(1 + \exp\left[-2\delta^2\tau^2\right]\right), \qquad (7.19)$$

а отже, для кореляційної функції маємо:

$$g^{(2)} = \left(1 + \exp\left[-2\delta^2\tau^2\right]\right), \qquad (7.20)$$

де δ – спектральна півширина лінії.

ДОДАТОК: Осциляції Рабі. Резонансна флюоресценція

Розглянемо експериментальні ефекти, які виникають, коли атом знаходиться у зовнішньому електромагнітному полі, частота якого близька до частоти атомного переходу. Така ситуація має місце, наприклад, коли на атом діє спонтанне випромінювання групи таких самих атомів або лазерного пучка з тією самою частотою. У результаті такої дії спостерігається явище, яке називається резонансною флюоресценцією. Використовуючи перебудовувані лазери можна легко збуджувати атом на резонансній частоті майже монохроматичним когерентним оптичним полем і досліджувати таку флюоресценцію. Розглянемо одноатомні ефекти, тобто ефекти, для виникнення яких досить одного атома, а якщо атомів багато, як в реальних експериментах, то при цьому міжатомною взаємодією можна знехтувати.

Осциляції Рабі.

У багатьох випадках модель дворівневої системи (атома) є хорошою для опису властивостей реальних квантовомеханічних систем (атомів, молекул) за умови виконання таких умов:

1. Спектр системи є суттєво нееквідистантним, і лише для однієї пари рівнів 1 (нижній) та 2 (верхній) виконується умова резонансу із зовнішнім електромагнітним полем: $\hbar\omega \approx \hbar\omega_{12}$; $\delta = \omega - \omega_{12}$, причому відхилення частоти від резонансної $\delta << \omega_{12}$.
2. Переходами з рівня 1 на інші рівні можна знехтувати.

Можна виділити два граничні випадки.

Якщо амплітуда поля змінюється повільно, тобто характерний час зміни амплітуди поля є набагато більшим, ніж часи повздовжньої та поперечної релаксації системи: $\tau >> \tau_1, \tau_2$, де τ_1 – час повздовжньої релаксації системи (характерний час релаксації заселеностей рівнів 1 і 2 до їх рівноважних значень за умови відсутності зовнішнього поля; ця релаксація відбувається внаслідок непружних процесів, які спричиняють переходи між рівнями $1 \to 2$ і $2 \to 1$; це – спонтанне випромінювання, непружне зіткнення атомів); τ_2 – час поперечної релаксації, тобто релаксації, зумовленої пружними процесами розсіяння, такими, що не змінюють енергію системи, проте спричиняють переходи між станами системи (атома), які мають

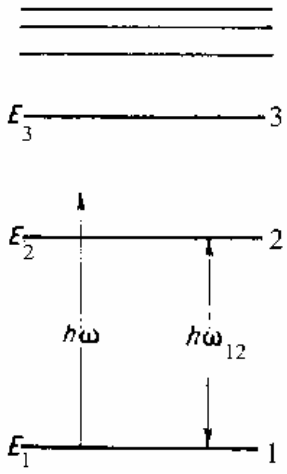


Рис. Д.1

однакову енергію (у випадку виродження енергетичних рівнів). У цьому випадку теорія дає для різниці заселеностей рівнів 1 і 2:

$$N_1 - N_2 = W = \frac{W_0}{1 + G\gamma^2 / \left(\gamma^2 + \delta^2\right)}\ , \qquad (Д.1)$$

де $G = 4\left|d_{12}A\right|^2 \hbar^{-2}\tau_1\tau_2$, $\gamma = \frac{1}{\tau_2}$, d_{12} - проекція дипольного моменту атома на напрямок поляризації електричної складової зовнішнього поля при переході, A – амплітуда поля. Зі співвідношення (Д.1) а також із рис.Д.2 видно, що при збільшенні амплітуди поля різниця заселеностей W зменшується з W_0 (при $A = 0$) до 0 (при $A \to \infty$), тобто відбувається вирівнювання заселеностей рівнів: $N_1 = N_2$, тобто відбувається насичення цього переходу, яке супроводжується зменшенням коефіцієнта поглинання. Отже звідси зрозуміло, що дворівнева система не може бути використана для створення лазерів, оскільки в ній принципово неможливо створити інверсну заселеність рівнів.

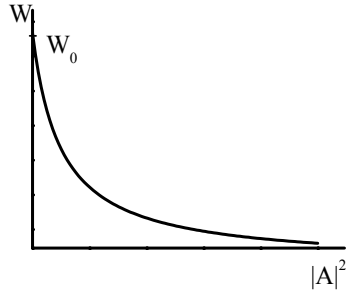


Рис. Д.2

2. Другий граничний випадок реалізується за умови, що амплітуда зовнішнього поля змінюється швидко порівняно з часами релаксації системи: $\tau << \tau_1, \tau_2$. Так, наприклад, коли поле являє собою послідовність коротких імпульсів:

$$A(t) = \begin{cases} A = const, & 0 \le t \le \tau; \\ 0, & t < 0,\ t > \tau, \end{cases}$$

тоді різниця заселеностей рівнів 1 і 2 згідно з теорією залежить від часу за законом:

$$n_1 - n_2 = W(t) = W_0 + W_0 \frac{\Omega^2}{\delta^2 + \Omega^2}\left(\cos\sqrt{\delta^2 + \Omega^2}\, t - 1\right), \quad (Д.2)$$

де $\Omega = \frac{2d_{12}A}{\hbar}$ – так звана частота Рабі. Тобто різниця заселеностей буде здійснювати осциляції з частотою $\omega' = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2}$, яка залежить від амплітуди поля A і відхилення δ частоти поля ω від внутрішньоатомної частоти ω_{12}. Ці осциляції називаються осциляціями Рабі. Графічно осциляції зображено на рис. Д.3, де для кривої 1 $\delta = 0$, а для кривої 2 $\delta = \Omega = 2d_{12}A/\hbar$.

Результатом такої залежності $W(t)$ є цікаві ефекти (назва та сама – осциляції Рабі), які проявляються в залежності інтенсивності резонансної флюоресценції атомів від часу. Схема спостереження резонансної флюоресценції представлена на рис. Д.Д. Резонансна флюоресценція спостерігається тоді, коли енергія збуджуючого фотона

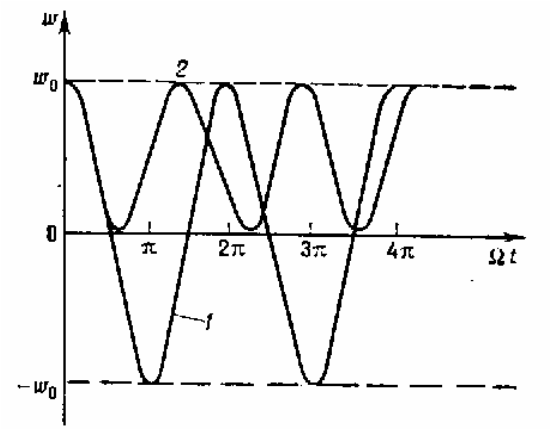


Рис. Д.3

знаходиться поблизу з атомним резонансом: $\hbar\omega \approx \hbar\omega_{12}$. Ця залежність $I(t)$ має осцилюючий характер (див. рис. Д.5). На рис. Д.5 точками зображено результати експериментів з дослідження резонансної флюоресценції атомів натрію [22] (Dagaines, Mandel: 1978), суцільною кривою – результати теоретичних розрахунків тих самих вчених. Ці експерименти були першими, які довели існування осциляцій Рабі в спектрах резонансної флюоресценції.

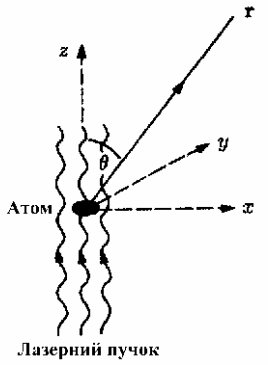


Рис. Д.4

Експерименти також підтвердили (див. рис. Д.6) залежність частоти осциляцій Рабі від амплітуди поля ($\omega' = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2}$, де $\Omega \sim |A|^2 \sim I$, I – інтенсивність; тобто частота має зростати при збільшенні амплітуди та величини відхилення частоти $\delta = |\omega - \omega_{12}|$. На рис. Д.6 (а) відповідає максимальній амплітуді збуджуючої хвилі, (б) – проміжній, (в) – мінімальній; крива 1 відповідає мінімальному відхиленню частоти, 2 – проміжному, 3 – максимальному.

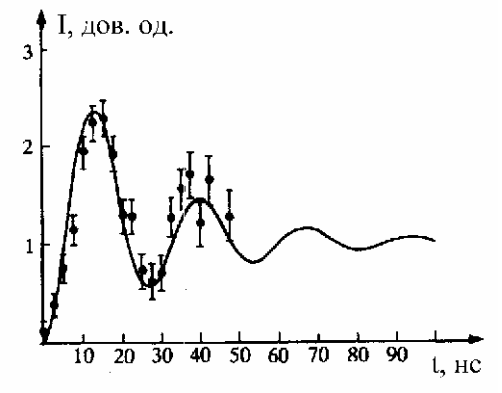


Рис. Д.5

Цікавим наслідком осциляцій різниці заселеностей $W(t)$ є поява у спектрі резонансної флюоресценції спектральних ліній на частотах $\omega = \omega_{12} \pm \omega'$, де $\omega' = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2}$, крім лінії ω_{12}. Цей ефект вперше був експериментально отриманий у роботі [23] (Schuda, Stroud, Hercher: 1974) з атомами натрію – див. рис. Д.7. Видно, що бокові спектральні компоненти “розсовуються” при збільшенні (за модулем) величини частотного відхилення.

Експерименти дають також залежність відстані від бокових компонент до центральної від потужності збуджуючого пучка (експерименти Wu, Grove, Ezekiel [24]: 1975 р. з вивчення резонансної флюоресценції атомів натрію: див. рис. Д.8). (а) відповідає мінімальній потужності збудження, (б) – проміжній та (в) – максимальній.

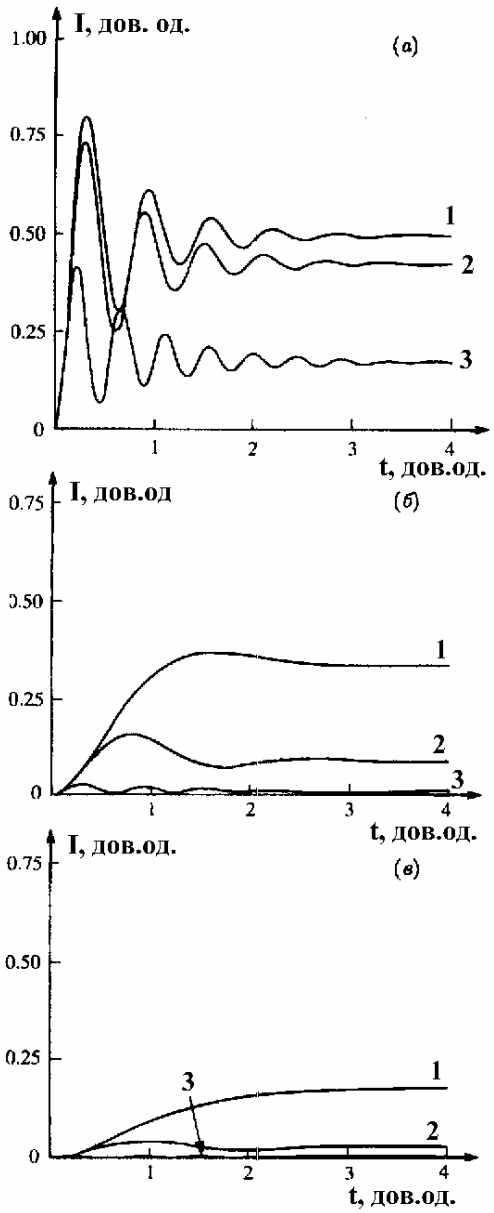

I, дов. од.
(а)
1.00
0.75
0.50
0.25
0
1
2
3
4
t, дов.од.
I, дов.од
(б)
0.75
0.50
0.25
0
1
2
3
4
t, дов.од.
I, дов.од.
(в)
0.75
0.50
0.25
0
1
2
3
4
t, дов.од.

Рис. Д.6

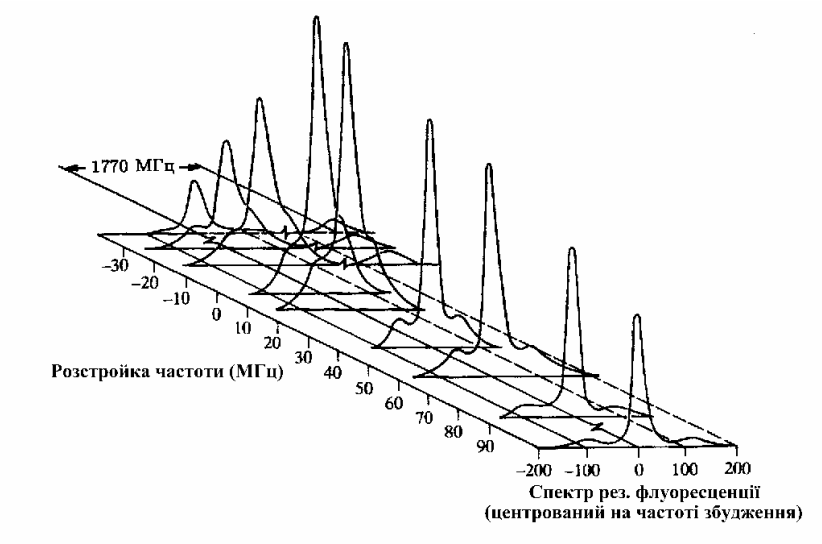

1770 МГц
–30
–20
–10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Розстройка частоти (МГц)
–200
–100
0
100
200
Спектр рез. флуоресценції
(центрований на частоті збудження)

Рис. Д.7

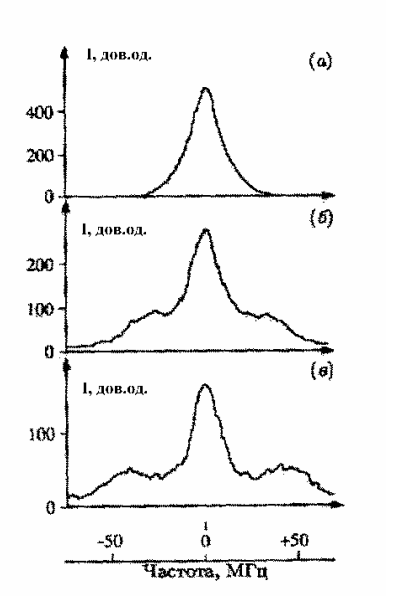

I, дов.од.
(а)
400
200
0
(б)
I, дов.од.
200
100
0
(в)
I, дов.од.
100
0
-50
0
+50
Частота, МГц

Рис. Д.8.

ЛІТЕРАТУРА

Монографії

1. Р. Лоудон, «Квантовая теория света» // М., Мир, 1976.
2. А. Мандель, Э. Вольф, «Оптическая когерентность и квантовая оптика» // М., Физматлит, 2000.
3. М.О. Скалли, М.С. Зубайри, «Квантовая оптика» // М., Физматлит, 2003.
4. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, «Квантовая электродинамика» (Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, «Теоретическая физика», т. IV) // М., Наука, 1980.
5. А.Н. Ахиезер, В.Б. Берестецкий, «Квантовая электродинамика» // М., Наука, 1969.

Статті в наукових журналах

6. M.S. Albert et al. //Nature, 1994, Vol.370, p.199.
7. E.W. Otten // Europhysics News, 2004, Vol.35, No.1, p.16
8. А.В.Слободянюк, „Эффекты пространственной дисперсии в комбинационном рассеянии света в гиротропных кристаллах ZnP_2“ // Физика твердого тела, 1986, Т.28, с.3275.
9. S.G.Garasevich,A.V.Slobodyanyuk, and Z.Z.Yanchuk “Anomalous angular dependence of E-modes splitting in Raman spectra of ZnP_2 and CdP_2 uniaxial gyrotropic crystals caused by spatial dispersion” // Physics Letters A, 1995, Vol.197, p.238.
10. L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A, 1992, Vol.45, p.8185.
11. M. Padgett, Courtial, L. Allen // Physics Today, 2004, No.5, p.35.
12. J.-L. Picque, J.-L. Vialle // Optics Communications, 1972, Vol.5, p.402.
13. T.W. Hansch, A.L. Schawlow // Optics Communications, 1975, Vol.13, p.68.
14. W.D. Phillips, H. Metcalf // Physical Review Letters, 1982, Vol. 48, pp.596.
15. E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D.E. Pritchard // Physical Review Letters, 1987, Vol. 59, pp.2631.
16. S. Chu, L. Hollberg, J. Bjorkholm, A. Cable, A. Ashkin // Physical Review Letters, 1985, Vol. 55, pp.48.
17. P.D. Lett, W.D. Phillips, S.L. Rolston, C.E. Tanner, R.N. Watts, C.I. Westbrook //Journal of Optical Society of America, 1989, Vol. 6, pp.2084.

18. J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji //Journal of Optical Society of America, 1989, Vol. 6, pp.2023.
19. R.J. Glauber, Photon correlations // Physical Review Letters, 1963, Vol.10, p.84.
20. E.J.S. Fonseca, C.H. Monken, S. Padua, “Measurement of the de Broglie wavelength of a multiphoton wave packet” // Physical Review Letters, 1999, Vol. 82, No. 14, pp. 2868-2871.
21. R. Edamatsu, R. Shimizu, T. Itoh, “Measurement of the photonic de Broglie wavelength of biphotons generated by spontaneous parametric down-conversion” // http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0109005.
22. M. Dagaines, L. Mandel // Physical Review A, 1978, Vol.18, p.2217.
23. F. Schuda, C.R. Stroud, M. Hercher // Journal of Physics B, 1974, Vol.7, p.L198.
24. F.Y. Wu, R.E. Grove, S. Ezekiel // Physical Review Letters, 1975, Vol. 35, pp.1426.

Навчальне видання

ЄЩЕНКО Олег Анатолійович
СЛОБОДЯНЮК Олександр Валентинович

КВАНТОВА ОПТИКА

Навчальний посібник
для студентів фізичного факультету

Друкується за авторською редакцією