КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**О. А. ЄЩЕНКО, В. М. ПРОКОПЕЦЬ,
О. В. СЛОБОДЯНЮК, С. В. КОНДРАТЕНКО,
В. Ю. КУДРЯ, Н. В. БАШМАКОВА,
К. С. ЯБЛОЧКОВА**

МЕХАНІКА. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

КИЇВ – 2015

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.2я73; 22.3я73
Є 97

Рецензенти:

О. К. Колежук, доктор фізико-математичних наук, професор
О. Я. Оліх, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до друку Вченою радою фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 11 від 26 червня 2015 року)

Єщенко О. А., Прокопець В. М., Слободянюк О. В., Кондратенко С. В., Кудря В. Ю., Башмакова Н. В., Яблочкова К. С.

Є97 Механіка. Лабораторний практикум: Навчальний посібник для студентів природничих спеціальностей університетів / За ред. О. А. Єщенка, О. В. Слободянюка. – К.: Четверта хвиля, 2015. – 268 с.

ISBN 978-966-529-313-2

У навчальному посібнику наведено описи лабораторних робіт до курсу «Механіка». Представлені в цьому посібнику лабораторні роботи присвячені вивченню механічних явищ з таких розділів класичної механіки, як кінематика, динаміка матеріальної точки, динаміка твердого тіла, закони збереження, коливання і хвилі, деформація твердих тіл. Також посібник містить спеціальну лабораторну роботу, метою якої є оволодіння студентами методами обробки і графічного представлення результатів вимірювань фізичних величин та розрахунку похибок цих вимірювань.

Посібник адресовано студентам природничих спеціальностей університетів.

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.2я73; 22.3я73

ISBN 978-966-529-313-2

© О. А. Єщенко, В. М. Прокопець, О. В. Слободянюк, С. В. Кондратенко, В. Ю. Кудря, Н. В. Башмакова, К. С. Яблочкова, 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....4

РОБОТА №0. Вивчення методики вимірювань фізичних величин та оцінювання похибок результатів вимірювань.....5

РОБОТА №1. Вивчення рівноприскореного руху за допомогою машини Атвуда.....27

РОБОТА №2. Математичний і фізичний (оборотний) маятники....41

РОБОТА №3. Маятник Обербека.....62

РОБОТА №4. Вивчення еліпсоїда інерції твердих тіл…….77

РОБОТА №5. Гіроскоп……....93

РОБОТА №6. Вивчення пружного та абсолютно непружного центрального удару куль.……...…107

РОБОТА №7. Визначення швидкості кулі за допомогою крутильного балістичного маятника……124

РОБОТА №8. Маятник Максвелла…….……...…141

РОБОТА №9. Похилий маятник…….……..……156

РОБОТА №10. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя рідини методом Стокса…….……169

РОБОТА №11. Визначення модуля пружності за розтягом дротини на приладі Лермантова.……...…180

РОБОТА №12. Визначення часу співудару куль та модуля Юнга……201

РОБОТА №13. Визначення швидкості звуку у повітрі……..212

РОБОТА №14. Вивчення коливань зв’язаних систем.……...226

РОБОТА №15. Визначення швидкості звуку і модуля Юнга у твердих тілах.…….....246

РОБОТА №16. Вивчення власних коливань струни.……..258

ПЕРЕДМОВА

Механіка – розділ, з якого студенти природничих факультетів університетів починають вивчення курсу загальної фізики. Механіка, передусім внаслідок своєї наочності та мінімуму вихідних постулатів та законів, дає унікальну можливість студентам сформувати фізичну культуру мислення, уміння застосовувати адекватні фізичні моделі при розгляді конкретних фізичних явищ, обгрунтовано робити необхідні наближення, розуміти межі застосовності отриманих результатів та ін. У механіці вводяться основні фізичні величини (маса, імпульс, момент імпульсу, енергія тощо) та формулюються фізичні закони (передусім закони збереження), на яких базується вся фізична наука. Тому чіткі знання і розуміння законів механіки є необхідною запорукою успішного опанування студентами інших розділів фізики.

На відміну від традиційних посібників, присвячених фізичному лабораторного практикуму, які переважно містять методичні поради до виконання робіт, у даному посібнику в описі до кожної роботи наведено досить повний теоретичний опис відповідного механічного явища. Автори зробили це свідомо, розуміючи проблеми вчорашніх школярів при пошуку необхідної інформації у великій кількості друкованих та електронних джерел.

У представлених в даному посібнику лабораторних роботах вивчаються механічні явища з таких розділів класичної механіки як кінематика, динаміка матеріальної точки, динаміка твердого тіла, закони збереження, коливання і хвилі, деформація твердих тіл. Також посібник містить спеціальну лабораторну роботу, метою якої є оволодіння студентами методами обробки і графічного представлення результатів вимірювань фізичних величин та розрахунку похибок цих вимірювань.

Цей навчальний посібник було створено на основі багаторічного досвіду авторів у читанні лекцій, проведенні практичних занять та лабораторних робіт з курсу «Механіка» для студентів природничих факультетів Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

РОБОТА № 0
ВИВЧЕННЯ МЕТОДИКИ ВИМІРЮВАНЬ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН ТА ОЦІНЮВАННЯ ПОХИБОК РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

МЕТА РОБОТИ

Ознайомитися з методикою вимірювань, оцінювання похибок вимірювань та представленням результатів вимірювань фізичних величин.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Фізика – наука експериментальна. Робота в лабораторних практикумах є невід'ємною частиною процесу вивчення університетського курсу фізики. Під час виконання лабораторних робіт студенти мають змогу спостерігати основні фізичні явища, навчитися працювати із вимірювальними приладами. Важливою складовою вивчення фізики є оволодіння методами вимірювань фізичних величин, вміти знаходити зв'язок між ними, зіставляти результати виконаного експерименту з результатами інших експериментів та з висновками теорії.

Вимірювання та похибки експериментальних результатів

Поняття вимірювання. Виміряти фізичну величину – означає порівняти експериментальним шляхом цю величину з величиною прийнятою за одиницю вимірювання (еталон). Одиниці вимірювання визначаються системою одиниць. Розрізняють *прямі* та *непрямі вимірювання*.

При ***прямих вимірюваннях*** фізичну величину порівнюють із одиницею вимірювання безпосередньо за допомогою вимірювального приладу, який має шкалу, градуйовану в одиницях вимірювання цієї фізичної величини. Наприклад, при вимірюванні довжини лінійкою, градуйованою в міліметрах, або при вимірюванні електричної напруги вольтметром, градуйованим у вольтах. При прямих вимірюваннях має місце співвідношення:

$$x_в = Cz, \qquad (0.1)$$

де z – відлік у поділках шкали вимірювального приладу чи безпосередній відлік із цифрового табло; C – ціна поділки шкали чи

одиничного показу цифрового табло; $x_{в}$ – виміряне значення фізичної величини.

При ***непрямих вимірюваннях*** фізична величина y визначається (обчислюється) за її відомою функціональною залежністю від інших фізичних величин $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n), \qquad (0.2)$$

де $f(x_1, x_2, \dots x_n)$– функціональна залежність, $x_1, x_2, \dots x_n$ отримані врезультатіпрямих вимірювань, y – значення вимірюваної фізичної величини в її власних одиницях вимірювання, тобто результат непрямих вимірювань. Наприклад: для визначення густини рідини за допомогою прямих вимірювань можна визначити масу m (на вагах) та об'єм V зразка рідини (мірною посудиною),а густину обчислити за формулою $\rho = {}^{m}/_{V}$.

Похибки результатів вимірювання. Істинне значення фізичної величини $x_{\text{іст}\backslash}$ визначити абсолютно точно неможливо в силу обмежень фундаментального характеру, суть яких буде розкриватись у процесі вивчення фізики, та технічної недосконалості вимірювальних приладів і методів вимірювання. Кожне вимірювання дає значення фізичної величини із деякою похибкою Δx. Це означає, що істинне значення знаходиться в інтервалі:

$$x_{\text{в}} - \Delta x \le x_{\text{іст}} \le x_{\text{в}} + \Delta x, \qquad (0.3)$$

де $x_{\text{в}}$ – значення фізичної величини x, яке було отримано в результаті проведення вимірювання, Δx –похибка вимірювання, яка характеризує точність вимірювання фізичної величини x. Величину Δx називають ***абсолютною похибкою*** фізичної величини x. При вимірюванні виникає дві задачі: визначення значення фізичної величини $x_{в}$ та визначення похибки Δx.

У процесі вимірювання фізичної величини отримується два числа: виміряне значення $x_{\text{в}}$ та похибка Δx. Чи можна виміряне значення $x_{\text{в}}$ вважати результатом вимірювання фізичної величини? Ні, не можна. Результатом вимірювання фізичної величини x відповідно до (0.3) є **інтервал значень**

$$x = x_{\text{в}} \pm \Delta x, \qquad (0.4)$$

в якому знаходиться істинне значення вимірюваної фізичної величини. ***Тому результат вимірювання завжди має бути записаний у вигляді***0.4). Як характеристику точності результатів вимірювання часто використовують *відносну похибку*:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{в}}} \cdot 100\%. \qquad (0.5)$$

Види похибок. Усі похибки розділяють на *систематичні*, *випадкові* та *промахи (помилки)*. ***Систематичною похибкою*** називається така похибка, яка залишається постійною, або закономірно змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж самої величини. Причиною виникнення систематичних похибок є особливості конструкції вимірювальних пристроїв, зовнішні впливи на вимірювальний пристрій, впливи на об'єкт вимірювання, недоліки методу вимірювання, застосування для обрахунку результату вимірювання неточних формул та округлених констант. Систематичні похибки характеризуються постійним знаком та величиною – вони або збільшують або зменшують результати вимірювання.

Вимірювальним приладом називають технічний пристрій чи засіб, за допомогою якого здійснюється порівняння вимірюваної фізичної величини з одиницею вимірювання. Будь-якому вимірювальному приладу властива ***інструментальна*** похибка $\Delta x_{\text{інст}}$, абсолютне значення (**але не знак!!**!) якої є однією з його технічних характеристик, що зазначається виробником приладу або на самому приладі, або в його технічній документації.

Випадковою похибкою називається похибка, яка змінюється від одного вимірювання до іншого як за знаком, так і за величиною, і ці зміни не можуть бути передбачені. Якщо вимірювання виконані одноразово, то значення випадкової похибки знайти неможливо. Якщо вимірювання проводяться багато разів за однакових умов, то значення випадкової похибки може бути знайдене шляхом статистичної обробки результатів вимірювання.

Промахи – це надмірні похибки, які спотворюють результат вимірювання(призводять до результату вимірювання, що значно відрізняється від очікуваного). Промахи найчастіше пов'язані з діями експериментатора: неправильно прочитані покази приладу, помилки при записі результатів у лабораторний журнал, неправильна експлуатація вимірювальних приладів. Результати вимірювання, які містять промахи, потрібно відкидати.

З точки зору точності вимірювання фізичної величини її вимірювання можна проводити технічними методами та лабораторними. ***Технічними*** називаються вимірювання, які проводяться одноразово за відомою методикою за допомогою приладів, інструментальні похибки яких відомі. Умови та методика проведення вимірювання гарантують задану точність, а тому похибка вимірювання залежить лише від похибки вимірювальних приладів і випадкова похибка не враховується. При проведенні ***лабораторних*** вимірювань значення фізичної величини визначаються точніше ніж при технічних вимірюваннях, оскільки при цьому враховується величина випадкової похибки. Для цього проводять багатократні вимірювання і визначають величину випадкової похибки.

Оцінка точності одного прямого вимірювання

Якщо при повторенні вимірювання за однакових умов декілька разів було отримано однакове значення $x = x_0$, це означає, що випадкова похибка відсутня. Тоді результат вимірювання потрібно записувати відповідно до (0.4) у вигляді:

$$x = x_0 \pm \Delta x_{\text{інст}}, \qquad (0.6)$$

тобто істинне значення $x_{\text{іст}}$ лежить з певною ймовірністю в інтервалі $x_0 - \Delta x_{\text{інст}} \le x_{\text{іст}} \le x_0 + \Delta x_{\text{інст}}$. Ця ймовірність зазвичай визначається прийнятими стандартами, а якщо відрізняється від них, то має бути зазначена в технічній документації засобу вимірювання.

Для характеристики аналогових вимірювальних приладів часто використовують поняття приведеної похибки$E_{\text{п}}$, або класу точності приладу. Приведена похибка – це відношення максимально можливої інструментальної похибки приладу $\Delta x_{\text{інст}}$ до граничного значення $x_{\text{гр}}$, яке може виміряти прилад:

$$E_{\text{п}} = \left|\frac{\Delta x_{\text{інст}}}{x_{\text{гр}}} \cdot 100\%\right|. \qquad (0.7)$$

За класами точності прилади розділяють на сім класів: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5; 4. Прилади класу точності 0,1; 0,2; 0,5 застосовують для точних вимірювань і називаються прецизійними. Для технічних вимірювань достатньо використовувати прилади з класом точності

1,0; 2,5; 4. Клас точності приладу вказується у вигляді числа на шкалі приладу. Якщо таке позначення відсутнє, то це означає, що його приведена похибка більше 4%. У такому випадку інструментальна похибка вимірювання приймається рівною ціні поділки приладу. Інструментальна похибка вимірювання визначається на основі формули (0.7):

$$\Delta x_{\text{інст}} = \pm\frac{E_{\text{п}} \cdot x_{\text{гр}}}{100\%}. \qquad (0.8)$$

При проведенні вимірювання рідко буває так, щоб значення фізичної величини було рівне $x_{\text{гр}}$, як правило, виміряне значення менше. Оскільки інструментальна похибка вважається незмінною, то чим менше значення виміряної величини, тим більшою буде відносна похибка, звідки випливає правило вибору діапазону проведення вимірювання: діапазон вимірювання приладу потрібно вибирати таким чином, щоб виміряне значення було якомога ближче до $x_{\text{гр}}$, тим самим відносна похибка буде наближатися до класу точності приладу. Жоден метод вимірювання не може перевершити точність приладу, тобто для проведення більш точних вимірювань потрібно вибирати прилади з вищим класом точності. Наприклад для вимірювання площі поверхні лабораторного столу буде достатньо звичайної лінійки з нанесеними міліметровими поділками (інструментальна похибка лінійки $\Delta x_{\text{інст}} = 1$ мм), а для вимірювання товщини дроту потрібен мікрометр (інструментальна похибка мікрометра $\Delta x_{\text{інст}}$ =систематична похибка 0,01 мм).

Для характеристики цифрових вимірювальних приладів використовують інші способи. Як правило, інструментальні похибки цифрових приладів прив’язуються не до граничного значення шкали, а до виміряного значення (задають відносну похибку) та одиничного показу цифрового табло (ціна одиниці молодшого розряду – ціна поділки для цифрового приладу):

$$\Delta x_{\text{інст}} = \pm(\delta \cdot x_{\text{в}} + \gamma \cdot k), \qquad (0.9)$$

де δ – відносна похибка, виражена в частках одиниці, $x_{\text{в}}$ – виміряне значення фізичної величини, γ – ціле число, k – ціна одиниці молодшого розряду. Значення δ, γ, k можуть залежати від діапазону вимірювання і вказуються в технічній документації приладу.

Оцінка точності багаторазових прямих вимірювань

Нехай при проведенні n вимірювань фізичної величини x за однакових умов отримано набір n значень $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$(. Це означає, що: 1) є причини, які призводять до випадкових відхилень результату кожного вимірювання x_i від істинного значення (наприклад, випадкові завади, тертя в вузлах механізмів); 2) сама вимірювана величина x має випадковий (статистичний) характер (наприклад, кількість γ-квантів від радіоактивного матеріалу, зареєстрована радіометром за одиницю часу. Із нескінченної множини можливих виміряних значень фізичної величини x ми маємо лише невелику кількість випадково вибраних значень. Цю сукупність будемо називати *випадковою вибіркою обсягу n*.

Найкращою оцінкою істинного значення вимірюваної фізичної величини є середнє арифметичне значення за вибіркою результатів вимірювання цієї величини, відоме як *вибіркове середнє значення*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (0.10)$$

Оцінкою випадкової похибки результатів вимірювання за невеликих n може бути *вибіркове середнє квадратичне відхилення*, яке ще називають ***стандартною похибкою***:

$$S_x = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}\ , \qquad (0.11)$$

де $\bar{x}$ знаходять зі співвідношення (0.10), а $n \geq 2$.

Якщо наявні випадкові похибки, то поява того чи іншого значення x_i в процесі вимірювання є випадковою подією. Існує деяка ймовірність появи цього значення x_i в інтервалі $[x_i - \Delta x_i, x_i + \Delta x_i]$, де $\Delta x_i = x_i - x_{\text{іст}}$– похибка виміряного значення x_i. Ця ймовірність визначається функцією густини розподілу ймовірності випадкової величини. У багатьох випадках ця густина визначається законом нормального розподілу Гауса:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \qquad (0.12)$$

де σ^2 – постійна величина, яка називається ***дисперсією випадкової величини*** і яка є характеристикою відхилення випадкової величини відносно її середнього значення $\bar{x}$. Отже нормальний розподіл характеризується двома параметрами: середнім значенням $\bar{x}$ та дисперсією σ^2. Графіки нормального розподілу Гауса за $\bar{x} = 10$ та $\sigma = 1, 2$ і 3 наведено на Рис. 0.1.

Дисперсія σ^2 розраховується за формулою:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} \ , \qquad (0.13)$$

де $\bar{x}$ знаходять зі співвідношення (0.10), а $n \geq 2$.

При збільшенні кількості вимірювань n дисперсія σ^2 монотонно зменшується, а при $n \to \infty$,стає рівною випадковій похибці вимірювання. Якщо під час проведення вимірювання абсолютна похибка окремого вимірювання $\Delta x_i = |x_i - \bar{x}| > 3\sigma$, то такий результат вимірювання вважається промахом (надмірною похибкою) і повинен бути вилучений із вибірки. Величину 3σ вважають приймаютьза граничну абсолютну похибку окремого вимірювання.

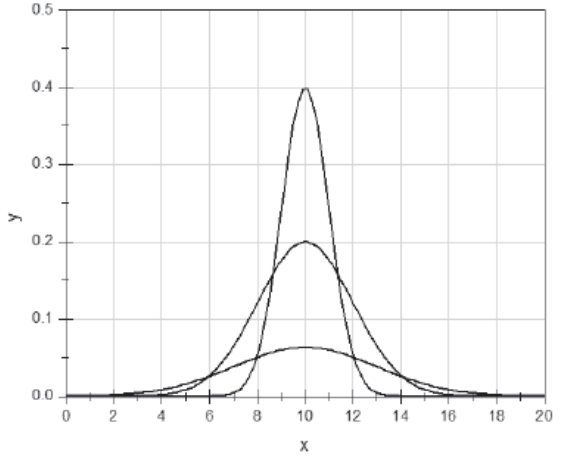


Рис. 0.1. Графіки функції Гауса для $\bar{x} = 10$ при $\sigma = 1, 2$ та 3.

Довірчим інтервалом називають інтервал $[\bar{x} - \Delta x,\ \bar{x} + \Delta x]$, в якому з заданою ймовірністю знаходиться істинне значення вимірюваної фізичної величини.

Надійністю результату вимірювання називається ймовірність α того, що істинне значення $x_{\text{іст}}$ вимірюваної величини потрапляє в заданий довірчий інтервал.

Імовірність α задається в відсотках або частках одиниці. Чим більший довірчий інтервал, який задається похибкою Δx, тим вища надійність того, що істинне значення потрапляє в цей інтервал. Надійність вимірювання α залежить від кількості проведених вимірювань n та величини похибки. Очевидно, що чим більшим є n, тим краще середнє вибіркове значення буде наближатися до істинного значення фізичної величини, і чим ширший довірчий інтервал тим вища ймовірність того, що істинне значення потрапить в цей інтервал. Існує зв'язок між обсягом вибірки n, надійністю вимірювання, вибірковим стандартним середньоквадратичним відхиленням та шириною довірчого інтервалу. Цей зв'язок є складним і не може бути поданий через елементарні функції. Існують спеціальні таблиці коефіцієнтів, які називаються коефіцієнтами Стьюдента і показують у скільки разів потрібно збільшити стандартний довірчий інтервал, який визначається вибірковим стандартним середньоквадратичним відхиленням, щоб при заданому обсязі вибірки n отримати задану надійність вимірювання (таблиця 0.1).

Табл. 0.1. Коефіцієнти Стьюдента *t(α, n)*.

Кількість вимірювань (обсяг вибірки)n	Надійність							
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,999
2	1,0	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	636,6
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	31,6
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	12,9
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	8,6
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	6,0
8	0,71	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	6,0
9	0,71	0,9	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	5,0
10	0,7	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	4,8
15	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	4,1
20	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	4,1
40	0,68	0,85	1,1	1,2	1,7	2,0	2,4	3,6
60	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	3,5
120	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	3,4
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	3,3

Алгоритм обробки результатів багатократних вимірювань.

1. Проводять n вимірювань і результати заносять в таблицю – створюють вибірку експериментальних значень.
2. Обчислюють вибіркове середнє значення за формулою: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
3. Обчислюють дисперсію: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$.
4. Вибірку експериментальних значень перевіряють на наявність промахів за критерієм $\Delta x_i = |x_i - \bar{x}| > 3\sigma$. За наявності промахів вони повинні бути вилучені із вибірки, після чого знову розраховують вибіркове середнє значення та дисперсію.
5. Обчислюють стандартну похибку за формулою $S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$. За заданою надійністю (у більшості випадків для лабораторного практикуму $\alpha = 0{,}95$) і обсягом вибірки n знаходять коефіцієнт Стьюдента $t(\alpha,n)$.
6. Обчислюють випадкову похибку $\Delta x_{\text{вип}} = t(\alpha, n) S_x$
7. Якщо відома інструментальна похибка $\Delta x_{\text{ін с т}}$, то загальну похибку обчислюють як $\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{вип}})^2 + (\Delta x_{\text{інст}})^2}$.

Результат вимірювання записують у вигляді:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x.$$

9.Для оцінки точності результату вимірювання обчислюють відносну похибку $\delta_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$ як частку середнього значення або у відсотках.

Оцінка точності непрямих вимірювань

Нехай фізична величина x визначається (обчислюється) за її відомою функціональною залежністю від інших фізичних величин $y,\ z, \dots t$:

$$x = f(y, z, \dots t),$$

Тоді найкращою оцінкою середнього значення $\bar{x}$ буде

$$\bar{x} = f(\bar{y}, \bar{z}, \dots \bar{t}), \qquad (0.14)$$

де $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$ – вибіркові середні значення фізичних величин *y, z,…,t.* Постає питання: як знайти похибку Δx, якщо відомі похибки Δy, $\Delta z, \dots$, Δt? Якщо похибки $\Delta y,\ \Delta z, \dots, \Delta t$ статистично незалежні одна від одної і за умови $\bar{y} \gg \Delta y, \bar{z} \gg \Delta z, \dots \bar{t} \gg \Delta t$, то похибку при непрямих вимірюваннях обчислюють за формулою:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \Delta t^2}. \qquad (0.15)$$

Правила обчислень із наближеними числами

При розрахунку фізичних величин та їх похибок потрібно пам'ятати, що точність, з якою визначено фізичну величину, визначається ***вимірюванням, а не обчисленням, і округлення числового значення результату повинно проводитися до цифри того ж порядку, що і значення похибки***. При розрахунку похибок їх округлюють до однієї або, найбільше, до двох значущих цифр. Похибки вимірювання вказують на те, які цифри є сумнівними в числовому значенні фізичної величини.

Маючи результати вимірювання, можна визначити ***вірні***, ***сумнівні*** та ***невірні цифри***. Наприклад, якщо в похибці містяться десятки, то число десятків будуть сумнівними. Нехай в серії вимірювань довжини отримані значення: 874 м, 895 м, 870 м, 885 м, 862 м, 873 м, 868 м. Після проведення розрахунків середнього значення та похибки калькулятор видав такі числа:

$$\bar{l} = 875{,}2857142857143 \text{ м},\ \Delta l = 11{,}16115713407121 \text{ м}.$$

Виникає питання: які з цих цифр є вірними, а які не вірними і до якого знаку потрібно округлити отримані числа? Похибка вимірювання задає довірчий інтервал, в якому міститься істинне значення вимірюваної фізичної величини, тому середнє значення повинно бути округлене до того ж порядку, що і похибка, оскільки всі менші порядки вже містяться в довірчому інтервалі. Щоб визначити до якого порядку округлювати похибку, потрібно звернутися до значень, які були отримані під час вимірювання, а саме, оскільки у виміряних значеннях остання цифра є одиниці, то і похибку потрібно округлити до одиниць. Після округлення отримаємо:

$$\bar{l} = 875 \text{ м},\ \Delta l = 11 \text{ м}.$$

В отриманому результаті у похибці містяться як десятки так і одиниці, тому в середньому значенні цифри, які позначають десятки, є ***сумнівними***, цифри які стоять лівіше від сумнівних – ***вірні***, а які стоять правіше – ***невірні***. Невірні повинні бути відкинуті як в похибці так і в середньому значенні. У цьому прикладі кінцевий результат повинен бути записаний у вигляді:

$$\bar{l} = 880 \text{ м},\ \Delta l = 10 \text{ м}.$$

До ***значущих*** відносяться всі вірні і сумнівні цифри, до ***незначущих*** – невірні цифри, нулі на початку десяткових дробів, нулі в кінці числа, які замінюють цифри, відкинуті після округлення. Наприклад, числа 564 ± 6; 0,00456 ± 0,000002; 0,002442 ± 0,00003 мають по три значущі цифри, число 34567 має п'ять значущих цифр, оскільки похибка не вказана.

При проведенні розрахунків із наближеними числами потрібно дотримуватися таких правил:

1. ***При додаванні і відніманні розряд сумнівної цифри результату співпадає із старшим із розрядів сумнівних цифр доданків. Тому під час віднімання чи додавання потрібно:***
   - ***а) у всіх доданків визначити розряди сумнівних цифр і визначити найстарший;***
   - ***б) всі доданки округлити до цього розряду, або зберегти ще один – запасний;***
   - ***в) виконати операцію додавання чи віднімання, округлити до найстаршого розряду сумнівної цифри із усіх доданків.***

Приклад. Обчислити:

$$5,4382 \cdot 10^5 - 2918 + 31,4 + 1,24 \cdot 10^{-3}.$$

Усі запропоновані числа містять значущі цифри. У першого числа сумнівна цифра – десятки, у другого – одиниці, у третього – десяті, у четвертого – стотисячні. Округлення проводять до старшого розряду – десятків, а останній доданок взагалі відкидається – в ньому відсутні одиниці і десятки:

$$543820 - 2920 + 30 = 540930 = 5,40930 \cdot 10^5.$$

2. ***Результат множення та ділення містить стільки значущих цифр, скільки їх міститься в числі з найменшою кількістю значущих цифр. Тому при множенні чи діленні чисел:***
   - ***а) представляють всі числа у вигляді, коли кома стоїть після першої цифри, а всі значущі цифри множать на множник десять у відповідному степені;***
   - ***б) з усіх чисел знаходять число з найменшою кількістю значущих цифр;***
   - ***в) всі числа округлюють так, щоб кількість значущих цифр не перевищувала найменшу кількість значущих цифр (іноді можна брати на одну цифру більше);***
   - ***г) виконують дії множення чи ділення над числами, які отримали після округлення, і залишають стільки значущих цифр, скільки їх було в числі з найменшою кількістю; потім проводять операції, які відповідають множенню чи діленню над множниками в степені десять;***
   - ***д) записують результат.***

Приклад. Помножимо 682,15 на 0,724: представимо числа у відповідності до пункту *а*) правил:

$$682,15 = 6,8215 \cdot 10^2;\ 0,724 = 7,24 \cdot 10^{-1}.$$

Найменша кількість значущих цифр – 3, округляємо перше число до трьох значущих цифр, виконуємо операцію множення і залишаємо три значущі цифри:

$$6,82 \cdot 7,24 \cdot 10^{2-1} = 49,3768 \cdot 10^1 = 4,93768 \cdot 10^2 \approx 4,94 \cdot 10^2.$$

3. ***При піднесенні в степінь у результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх було в основі.***

4. ***При добуванні кореня будь-якого степеня результат повинен мати стільки значущих цифр, скільки їх було в підкореневому виразі.***
5. ***При логарифмуванні числа в мантисі логарифма залишають стільки значущих цифр, скільки їх було в числі.***
6. ***Якщо в розрахункові формули входять константи, наприклад число π, фізичні константи, табличні дані, то вони беруться з такою точністю, щоб кількість значущих цифр було на одну більше, ніж в значеннях виміряних фізичних величин. Тоді константи не вноситимуть похибки в результати вимірювання.***

Наведені правила потрібно використовувати при розрахунках, особливо з використанням обчислювальної техніки, завжди потрібно знати, які цифри в отриманих експериментальних даних є вірними, а які потрібно відкинути, оскільки невірні цифри призводять до додаткових похибок.

Побудова графіків

У більшості випадків експериментального дослідження різних фізичних явищ доцільно представляти отримані залежності фізичних величин у вигляді графіків. Як оцінити, чи узгоджуються результати досліду з величиною, яка розрахована з використанням теорії? Для цього потрібно співставити криву, яка розрахована теоретично, з даними, отриманими експериментально. Для цього потрібно проаналізувати залежності між вимірюваними величинами і з'ясувати їх характер (лінійна, степенева, експоненціальна, тощо). Для аналізу найбільш зручними є лінійні залежності, тому, по можливості, потрібно провести таку заміну змінних в рівняннях, щоб очікувана залежність була лінійною. У випадку лінійної залежності легко визначити кутовий коефіцієнт. Наприклад при визначенні прискорення вільного падіння зі співвідношення $h = gt^2/2$ між висотою та часом руху зручно побудувати графік у координатах $\left(t^2, h\right)$. Далі необхідно за методом найменших квадратів, описаним нижче, апроксимувати

експериментальні точки лінійною функцією $h\left(t^2\right)=\alpha t^2+\beta$, де коефіцієнт апроксимації α і буде дорівнювати прискоренню вільного падіння: $\alpha=g$. Отже, при апроксимації значення g визначатиметься за всією сукупністю експериментальних точок. Зауважимо, що апроксимація за методом найменших квадратів реалізована для багатьох функціональних залежностей у спеціалізованому комп'ютерному програмному забезпеченні (наприклад, Origin та MS Excel).

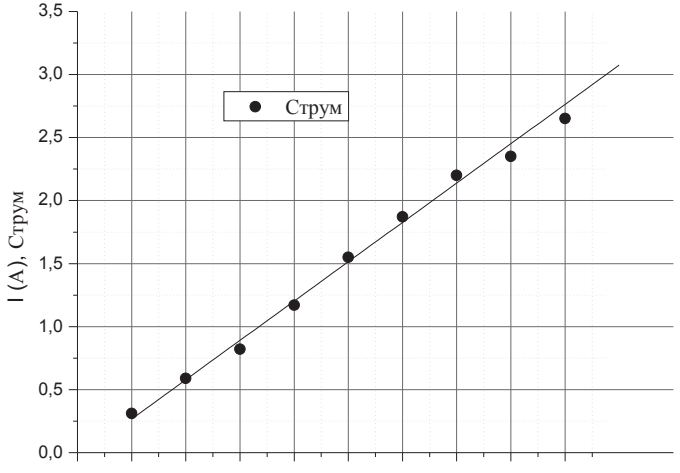


Рис. 0.2. Приклад оформлення графіку. Залежність струму від напруги.

Графіки, як правило, будуються на міліметровому папері або з використанням персонального комп'ютера та спеціалізованого програмного забезпечення (Origin, MS Excel). При побудові графіків потрібно вибирати масштаб таким чином, щоб криві займали все поле малюнку. В якості системи координат можна використовувати прямокутну систему координат із двох взаємно

перпендикулярних осей або прямокутну рамку. На осях координат наносять мітки, які відповідають певним числовим значенням. При побудові графіка на міліметровому папері за одиницю масштабу зручно брати числа кратні 5, 10, 50, 100 мм. Числові значення проставляються на осях (ліва та нижня осі) тільки для великих одиниць масштабу. Біля осей координат (зліва та знизу) потрібно написати назви величин, які відповідають цим осям, їх позначення та одиниці вимірювання. Всі написи повинні добре читатися – розмір літер та цифр має бути не менше 5 мм. Приклад оформлення графіка наведено на рис. 0.2.

Експериментальні точки наносяться на графік у вигляді умовних значків (кружечки, квадратики, хрестики, тощо), бажано для кожної точки вказати похибки у вигляді відрізків. Похибки можна вказувати для однієї чи обох змінних. Як правило, залежності, які пов'язують фізичні величини – це гладенькі лінії, без різких зламів чи стрибків. Експериментальні точки, внаслідок похибок, не вкладаються на гладенькі криві, тому не потрібно з'єднувати сусідні експериментальні точки, отримуючи ламану криву. Якщо є теоретично розрахована залежність, то її наносять на той самий рисунок у тому самому масштабі. Якщо теоретично розрахувати графік немає можливості, то можна провести гладеньку лінію так, щоб вона мінімально відхилялася від експериментальних точок.

Метод найменших квадратів. Якщо залежність між виміряними величинами є лінійною

$$y=bx+c \qquad (0.16)$$

або може бути зведена до лінійної, то можна скористатися методами математичної статистики для знаходження найкращих (найбільш ймовірних) оцінок параметрів лінійної залежності *b* та *c*. Припустимо, що в результаті проведення вимірювань отримали *n* пар значень $\left(x_1,y_1\right)$, $\left(x_2,y_2\right)$, … , $\left(x_n,y_n\right)$. Припустимо, що похибка вимірювання величини y_i значно перевищує похибку x_i – це означає, що похибками x_i можна знехтувати. Якби параметри лінійної залежності *b* та *c* були відомі, то можна було б знайти відхилення в *i*-му вимірюванні: $y_i-(bx_i+c)$. Найкращі значення *b* та *c* вибираються таким чином, щоб сума квадратів відхилень

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (bx_i + c))^2 \qquad (0.17)$$

була мінімальною (звідси походить назва: метод найменших квадратів). Щоб знайти мінімум суми квадратів відхилень знайдено частинні похідні по *b* та *c* від (0.17):

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} \left[-2x_i (y_i - bx_i - c)\right] = 0, \qquad (0.18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} \left[-2(y_i - bx_i - c)\right] = 0. \qquad (0.19)$$

Таким чином, параметри лінійної залежності *b* і *c* знаходяться шляхом розв'язку системи рівнянь:

$$b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad (0.20)$$

$$b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (0.21)$$

Якщо (0.21) поділити на *n* і ввести позначення $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ та $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, то отримаємо:

$$\overline{y} = b\overline{x} + c. \qquad (0.22)$$

Таким чином, видно, що найкраща пряма повинна проходити через точку з координатами $(\overline{x}, \overline{y})$. З рівнянь (0.20) та (0.21) знаходимо:

$$c = \overline{y} - b\overline{x}, \qquad (0.23)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}. \qquad (0.24)$$

Середньоквадратичні похибки визначення параметрів лінійної залежності розраховуються таким чином:

$$(\Delta b)^2 \approx \frac{1}{D} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - c)^2}{n-2}, \qquad (0.25)$$

$$(\Delta c)^2 \approx \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{D}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - c)^2}{n-2}, \qquad (0.26)$$

де $D = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ – середньоквадратичне відхилення для величини x. Якщо виконується умова, що пряма проходить через початок координат ($c = 0$), то параметр *b* буде визначатися як

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad (0.27)$$

а його середньоквадратична похибка буде визначатися як

$$(\Delta b)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2}{n-1}. \qquad (0.28)$$

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА

Для вимірювання лінійних величин використовують різні прилади та інструменти. Найпростіші з них лінійка, штангенциркуль, мікрометр, тощо. Якщо потрібно виміряти довжину з точністю до 1 мм, то використовують л+інійку, на яку нанесена шкала з розміром найменшої поділки 1 мм. Величина найменшої поділки лінійки називається ціною поділки. Якщо вимірювання потрібно провести із точністю 0,1 мм, то вимірювальний прилад оснащують додатковою шкалою – ноніусом. Ноніус – це невелика лінійка зі шкалою, зроблена таким чином, що цілому числу поділок основної шкали (*p*) відповідає ціле число поділок ноніуса (*m*). В найпростішій конструкції, *m* поділок ноніуса дорівнюють $p = m - 1$ поділкам основної шкали (рис. 0.2). Ноніус може переміщуватися відносно основної шкали.

Якщо *a* – ціна поділки ноніуса і *b* – ціна поділки масштабної лінійки, то зв'язок між поділками буде такий:

$$am = (m-1)b. \qquad (0.29)$$

З (0.29) отримаємо відношення $\frac{b}{m} = \frac{a}{m-1}$, яке називається ***точністю ноніуса***, тобто точність $\frac{b}{m}$ ноніуса визначається відношенням ціни поділки основної масштабної лінійки до кількості поділок на ноніусі.

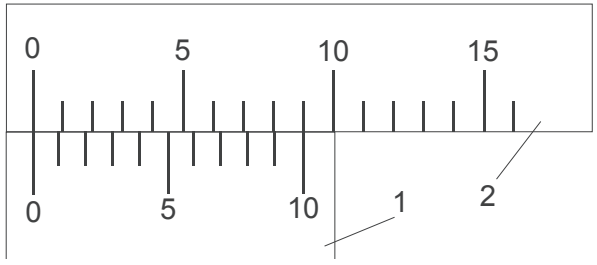


Рис. 0.2. Лінійний ноніус. 1 – ноніус з m = 10; $p = m - 1 = 9$; 2 – масштабна лінійка.

Точність ноніусу часто буває рівна 1/10 мм, в цьому випадку b = 1 мм m = 10; $p = m - 1 = 9$. Вимірювання за допомогою ноніусу виконують таким чином: до нульової поділки шкали прикладають один кінець тіла яке вимірюють, а до другого кінця – нульову поділку шкали ноніусу (рис. 0.3).

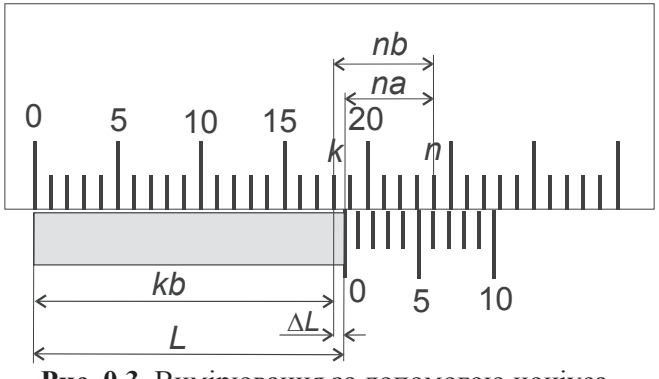


Рис. 0.3. Вимірювання за допомогою ноніуса.

$$L = kb + \Delta L, \qquad (0.30)$$

де k – ціле число поділок масштабної лінійки в мм, яке вкладається в довжину тіла; ΔL – відрізок довжини L, менший ціни поділки основної шкали, тобто менший ніж 1 мм. Позначимо n ту поділку ноніусу, яка точно співпадає з якоюсь поділкою масштабної лінійки, тоді

$$\Delta L = nb - na = n(b - a). \qquad (0.31)$$

Використовуючи (0.29) і беручи до уваги, що в даному випадку $a = b\frac{m-1}{m}$ отримуємо

$$\Delta L = n\frac{b}{m}$$

З формул (0.30) і (0.31) знаходимо:

$$L = kb + n\frac{b}{m}. \qquad (0.32)$$

Для стандартного штангенциркуля ціна поділки основної масштабної шкали b = 1 мм, а кількість поділок ноніуса m = 10, тоді формула (0.32) набуває вигляду:

$$L = (k + 0{,}1n)\text{мм}. \qquad (0.33)$$

Лінійний ноніус використовується у вимірювальному приладі, який використовується для вимірювання довжини, і називається штангенциркулем. Штангенциркуль призначений для вимірювання з високою точністю зовнішніх, внутрішніх розмірів та глибини отворів. Він складається зі стальної міліметрової лінійки (штанги) 1 (рис. 0.4), на якій є нерухома лапка 2, вздовж лінійки може переміщатися рухома рамка 3 із лапкою та лінійкою глибиноміра 4, на яку нанесений ноніус 5. Для вимірювання зовнішніх розмірів використовуються лапки 6, а для вимірювання внутрішніх розмірів – лапки 7.

Уданій лабораторній роботі використовується штангенциркуль ШЦ-1, в якого p = 19 поділок міліметрової шкали рівні m = 10 поділкам ноніуса. Ціна поділки ноніуса $a = {}^{19}/_{10}$ мм. Така розбивка зроблено тільки для зручності зчитування, точність вимірювання залишається 0,1 мм.

Вимірювання довжини за допомогою штангенциркуля проводять наступним чином (рис. 0.5).

1. Предмет розміщують між лапками штангенциркуля і злегка притискають.

2. Зчитують кількість цілих міліметрів. Для цього знаходять на шкалі лінійки штрих, який є найближчий зліва до нульового штриха ноніуса.

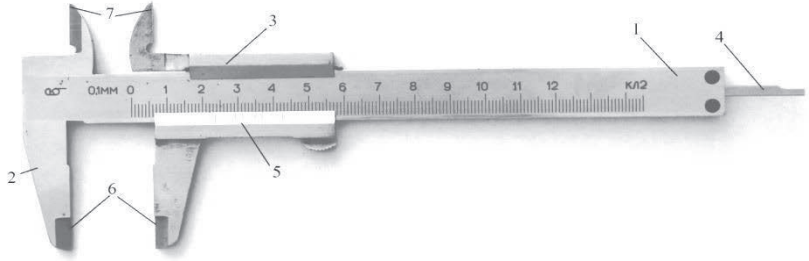


Рис. 0.4. Конструкція штангенциркуля ШЦ-1. 1 – нерухома лінійка, 2 – нерухома лапка, 3 – рамка, 4 – лінійка глибиноміра, 5 – шкала ноніуса, 6 – лапки для зовнішніх вимірювань, 7 – лапки для внутрішніх вимірювань.

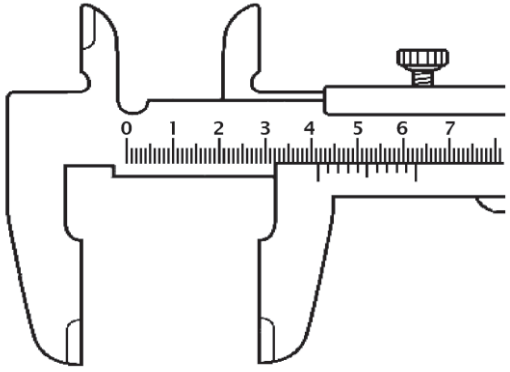


Рис. 0.5. Вимірювання за допомогою штангенциркуля.

3. Зчитують частки міліметрів. Для цього знаходять штрих ноніуса найближчий до нульової поділки, який співпадає зі штрихом лінійки, і множать його порядковий номер на точність ноніусу.
4. Повна довжина – це сума цілих та долей міліметра.

Наприклад, на рис. 0.4 зображено принцип вимірювання штангенциркулем. Кількість цілих міліметрів – 41, а часток – 0,1× 3 = 0,3. Отже, вимірюваний розмір становить 41 мм + 0,3 мм = 41,3 мм.

ВИМІРЮВАННЯ

У роботі за допомогою штангенциркуля необхідно виміряти геометричні розміри різних тіл, запропонованих викладачем, а на основі виміряних даних розрахувати об’єм та площу поверхні тіл.

Наприклад: знайти об’єм циліндра. Вимірювання проводяться в такій послідовності.

1. За допомогою штангенциркуля виміряти висоту h циліндра. Вимірювання виконати 10 разів в різних місцях циліндра. Результати вимірювання занести до таблиці результатів вимірювання.
2. За допомогою штангенциркуля виміряти діаметр d циліндра. Вимірювання виконати 10 разів в різних місцях циліндра. Результати вимірювання занести до таблиці результатів вимірювання.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Обчислити середні вибіркові значення, абсолютні та відносні похибки прямих вимірювань і занести їх до таблиці результатів.
2. Використовуючи формулу для об’єму циліндра $V = \frac{\pi d^2}{4} h$, знайти середнє значення об’єму (формула (0.14)) та значення абсолютної (формула (0.15)) та відносної похибки і занести їх до таблиці результатів.
3. Результат вимірювання записати у вигляді: $V = \bar{V} \pm \Delta V$, δ_V.

Табл. 0.2. Таблиця результатів вимірювання

Виміряне значення x_i	Середнє значення $\bar{x}$	Випадкова похибка $\Delta x_{\text{вип}}$	Похибка вимірювання $\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{вип}})^2 + (\Delta x_{\text{інст}})^2}$	Відносна похибка δ_x	Виміряне значення $x = \bar{x} \pm \Delta x$
d_1	$\bar{d}$	$\Delta d_{\text{вип}}$	Δd	$\delta_d = \frac{\Delta d}{\bar{d}}$	$d = \bar{d} \pm \Delta d$
d_2					
…					
d_i					
d_n					

Теоретичні завдання

1. Дайте визначення терміна «вимірювання фізичної величини».
2. Якими бувають види вимірювань?
3. Що таке довірчий інтервал? Дайте означення терміну «надійність вимірювання».
4. Види похибок.
5. Клас точності приладу. Зв'язок абсолютної похибки та відносної похибки з класом точності приладу.
6. Методика оцінки абсолютної та відносної похибки однократного вимірювання.
7. Вольтметром, який має клас точності приладу 0,5, було виміряні напруги автомобільної акумуляторної батареї U = 13,2 В, та акумуляторної батареї мобільного телефону U = 3,9 В. Знайти абсолютну та відносну похибки результату вимірювання, якщо максимальне значення напруги, яке може виміряти вольтметр: 15 В. У якому випадку вимірювання будуть точніші?
8. Методика оцінки точності прямих багаторазових вимірювань.
9. Методика оцінки точності при непрямих вимірюваннях.
10. У результаті вимірювання діаметра кулі, за допомогою штангенциркуля (Δd_c = ±0,02 мм) отримано ряд значень:

d, мм	12,25	12,38	12,31	12,41	12,50	12,43	12,49

Знайти об'єм кулі та обчислити абсолютну та відносну похибки визначення об'єму.

Рекомендована література

1. Касандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: «Наука», 1970. – 105 ст.
2. Общий физический практикум. Механика. Под редакцией А.Н. Матвеева, Д.Ф. Киселева. – М.: МГУ, 1991. – 272 ст.
3. Каленков С.Г., Соломахо Г.И. Практикум по физике. Механика: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высш. школа 1990. – 111 ст.

РОБОТА № 1

ВИВЧЕННЯ РІВНОПРИСКОРЕНОГО РУХУ ЗА ДОПОМОГОЮ МАШИНИ АТВУДА

Мета роботи

1. Визначити прискорення вільного падіння за допомогою машини Атвуда.
2. Вивчити основні закономірності прямолінійного рівноприскореного руху.

Опис експериментальної установки

Схема експериментальної установки на основі машини Атвуда наведена на рис. 1.1. Вона складається з блока, що може обертатися навколо нерухомої горизонтальної осі, та перекинутої через блок нитки, на кінцях якої підвішені два важки однакової маси M.

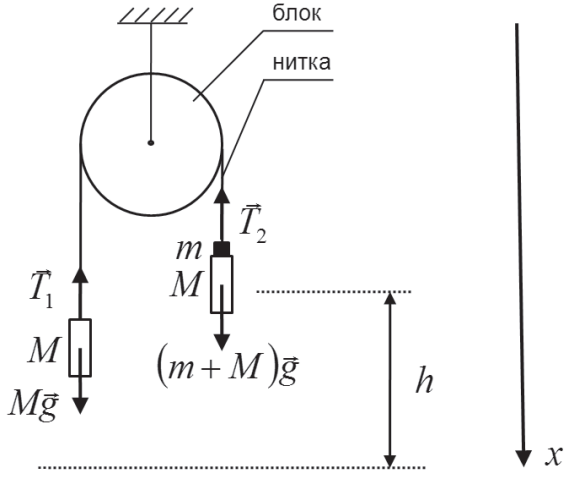


Рис. 1.1. Схема експериментальної установки.

Унаслідок цього така система може перебувати в стані спокою (рівноваги). Перед початком вимірювань правий важок переводять у верхнє положення і блокують систему за допомогою електромагнітного реле, що унеможливлює її рух. Якщо тепер на правий важок покласти додатковий тягарець маси *m* і натиснути кнопку «ПУСК», то блокування системи припиниться і система почне рухатись із прискоренням. Одночасно з розблокуванням системи (початком її руху) вмикається секундомір. При перетинанні правим важком пучка світла, що падає на фотодатчик (не показаний на рис. 1.1), відлік часу припиняється. При цьому прилад фіксує проміжок часу *t*, за який правий важок пройшов відстань *h*. Вимірювання відстані *h* слід виконувати за допомогою лінійки, і визначати її як відстань між нижньою поверхнею правого важка в початковому верхньому положенні та центром світлової плями на фотодатчику.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Переміщення, швидкість та прискорення матеріальної точки

Для кількісного опису положення тіла в просторі в рамках координатного методу із системою відліку пов'язують систему координат. Найпоширенішою є прямокутна декартова система координат (рис. 1.2), ***ортонормований базис*** якої утворений трьома одиничними взаємно ортогональними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$, початки яких обрано в початку відліку *O*. Слід підкреслити, що взаємна орієнтація ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ не є довільною, а однозначно задається співвідношенням $\vec{k} = \left[\vec{i} \times \vec{j}\right]$.

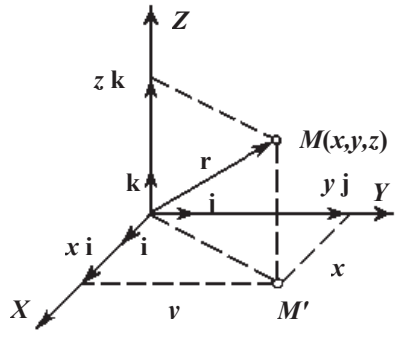


Рис.1.2. Визначення положення тіла в просторі за допомогою декартової системи координат

Положення довільної точки *M* характеризується ***радіус-вектором*** $\vec{r}$, який з'єднує початок відліку *O* з точкою *M*. Вектор $\vec{r}$ можна розкласти за базисом $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ як $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ та $z\vec{k}$ – компоненти (складові) вектора $\vec{r}$ за осями координат. Числові коефіцієнти x, y, z – це декартові координати точки *M*, а також, внаслідок ортогональності векторів базису – проекції радіус-вектора $\vec{r}$ на відповідні осі координат. ***Швидкістю*** **(або *миттєвою швидкістю*)** точки називається векторна величина $\vec{\upsilon}$, яка дорівнює першій похідній за часом від радіус-вектора $\vec{r}$ розглядуваної точки:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.1)$$

Вектор $\vec{\upsilon}$ швидкості точки напрямлений по дотичній до траєкторії в напрямку руху, тобто так само, як і вектор $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$ нескінченно малого (елементарного) переміщення точки за нескінченно короткий проміжок часу dt. Елементарний шлях ds, пройдений точкою за час dt, дорівнює модулю нескінченно малого вектора

переміщення: $ds = |d\vec{r}|$. Тому модуль швидкості точки дорівнює першій похідній від шляху за часом:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \frac{ds}{dt}. \qquad (1.2)$$

Як будь-який вектор, вектор $\vec{\upsilon}$ можна розкласти за базисом прямокутної декартової системи координат: $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$. Проекції швидкості точки на осі координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат точки:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \ \upsilon_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{та} \ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}, \qquad (1.3)$$

а модуль вектора швидкості:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}. \qquad (1.4)$$

Під час прямолінійного руху точки напрямок вектора її швидкості зберігається. Рух точки називається ***рівномірним***, якщо її швидкість не змінюється з часом (тобто не змінюється ані модуль, ані напрям швидкості): $\vec{\upsilon} = const$. При рівномірному русі точки траєкторія є прямолінійною, а пройдений нею шлях s залежить від часу лінійно: $s = \upsilon t$ (за умови, що $t_0 = 0$). Якщо швидкість точки змінюється з часом, то такий рух називається ***прискореним***. Частинним випадком прискореного руху є рух по прямолінійній траєкторії (тобто напрямок швидкості не змінюється), при якому швидкість змінюється лише за модулем. Якщо модуль швидкості точки зростає із часом ($d\upsilon/dt > 0$), то рух називається ***прямолінійним прискореним***, а якщо спадає ($d\upsilon/dt < 0$) ***прямолінійним сповільненим***.

Для характеристики зміни вектора швидкості точки з часом у механіці вводиться поняття прискорення. ***Прискоренням*** точки

називається векторна величина $\vec{a}$, що дорівнює першій похідній за часом від швидкості точки, або, що те саме, другій похідній за часом від радіус-вектора $\vec{r}$ цієї точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.5)$$

Розкладання вектора $\vec{a}$ за базисом прямокутної системи координат дає:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (1.6)$$

Проекції прискорення на осі координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проекцій швидкості або, що те ж саме, другим похідним за часом від відповідних координат точки:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{та} \ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (1.7)$$

Модуль вектора прискорення:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \qquad (1.8)$$

В кінематиці рівноприскорений рух матеріальної точки описують за допомогою системи рівнянь

Рівняння руху матеріальної точки

Відповідно до другого закону Ньютона, справедливого в інерціальних системах відліку, п**рискорення матеріальної точки прямо пропорційне прикладеній до неї силі й обернено пропорційне її масі.** Другий закон Ньютона може бути поданий векторним рівнянням:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \qquad (1.9a)$$

яке прийнято записувати у вигляді:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \qquad (1.9б)$$

де $\vec{F}$ у загальному випадку є ***результуюча (векторна сума)*** усіх сил $\vec{F}_i$, прикладених до матеріальної точки, $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$.

У зв'язку з цим рівнянням можливі дві постановки задачі:

1) знайти закон руху матеріальної точки з масою m, тобто залежність від часу її радіус-вектора $\vec{r}(t)$, якщо відомі прикладені до неї сили $\vec{F}_i$ та початкові умови: положення матеріальної точки $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ та її швидкість $\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}(0)$ у деякий початковий момент часу $t = 0$;

2) знайти закон прикладеної до матеріальної точки сили, якщо відомий закон її руху, тобто залежність від часу її радіус-вектора $\vec{r}(t)$.

Динаміка руху машини Атвуда

Розглянемо рух важка з масою M та важка з тягарцем $M + m$, закріплених на нитці, що перекинута через блок (див. рис. 1.1). Знехтуємо опором повітря, тертям в блоці, масою нитки та блока. У такому випадку сили натягу ниток, які діють на важки, рівні: $\vec{T}_1 = \vec{T}_2 = \vec{T}$. Ці сили за третім законом Ньютона дорівнюють силам натягу, що діють на кінці нитки з боку важків. Відповідні рівняння руху важків матимуть вигляд:

$$M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{T} \qquad (1.11)$$

$$(M + m)\vec{a}_2 = (M + m)\vec{g} + \vec{T} \qquad (1.12)$$

Оберемо систему координат як показано на рис. 1.1. Спроектуємо векторні рівняння (1.11) та (1.12) на вісь *x*:

$$M\ddot{x}_1 = Mg + T \qquad (1.11а)$$

$$(M + m)\ddot{x}_2 = (M + m)g + T, \qquad (1.12б)$$

де T – модуль сил натягу ниток. Уважатимемо нитку нерозтяжною, тобто її довжину сталою: $l = const$. Тоді сума координат кінців нитки також є сталою величиною, $x_1 + x_2 = const$. Друга похідна за часом від цієї рівності є $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$, звідки випливає, що $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$. Отже прискорення важків однакові за модулем та протилежні за напрямками. Уведемо позначення $\ddot{x}_2 = a$. Тоді з (1.11а) та (1.12а) одержимо:

$$-Ma = Mg - T \qquad (1.13)$$

$$(M + m)a = (M + m)g - T, \qquad (1.14)$$

звідки можна отримати величину прискорення:

$$a = g\frac{m}{m + 2M}. \qquad (1.15)$$

Формула (1.15) свідчить про те, що при виконанні наведених вище припущень рух важків має бути **рівноприскореним**, тобто таким, при якому причому $\vec{a} = const$. Відповідно до (1.15) прискорення важків завжди менше прискорення вільного падіння і змінюється в залежності від співвідношення мас важків. Час, за який важок пройде відстань *h*, рівний:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \sqrt{\frac{m + 2M}{m}}. \qquad (1.16)$$

Переконатись у тому, що рух важків в експериментах з машиною Атвуда є рівноприскореним, можна двома способами. **По-перше**, можна визначити час падіння за різних початкових висот розташування правого важка. Маса додаткового тягарця в такому

експерименті має залишатись незмінною. Експериментальні точки графіка, на осях якого відкладені величини $x=\sqrt{h}$ та $y=t$, мають апроксимуватися лінійною функцією $y(x)=\alpha x+\beta$ (див. рис.1.3), в якій згідно з (1.16) параметр апроксимації $\alpha=\sqrt{2/a}$. Звідси можна визначити величину прискорення a, і за формулою

$$g=a\frac{m+2M}{m} \qquad (1.17)$$

розрахувати прискорення вільного падіння. Співпадіння у межах похибки визначеного значення g та відповідного табличного значення має свідчити про коректність використаної фізичної моделі, а отже, про те, що рух важків є рівноприскореним.

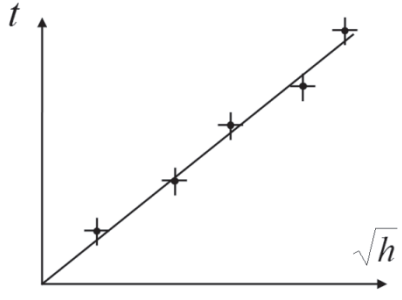


Рис. 1.3. Апроксимація залежності $t\left(\sqrt{h}\right)$ лінійною функцією.

По-друге, можна визначити прискорення a при русі з фіксованої висоти h за різних мас додаткового тягарця m. За умови $m<<M$ з формули (1.16) можна отримати:

$$t\approx 2\sqrt{\frac{h}{g}}\cdot\sqrt{\frac{M}{m}}. \qquad (1.17)$$

Це означає, що експериментальна залежність, побудована в координатах $x=\sqrt{\frac{M}{m}}$, $y=t$ має бути лінійною (рис.1.4). Апроксимація експериментальної залежності $t\left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)$ лінійною функцією $y(x)=\gamma x+\delta$ (рис. 1.4), в якій згідно з (1.17) параметр апроксимації $\gamma=2\sqrt{h/g}$ дозволяє розрахувати прискорення вільного падіння. Аналогічно першому методу, співпадіння у межах похибки визначеного значення g та відповідного табличного значення має свідчити про те, що рух важків є рівноприскореним.

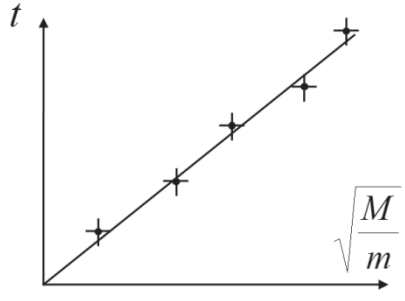


Рис. 1.4. Апроксимація залежності $t\left(\sqrt{M/m}\right)$ лінійною функцією.

Для обраної системи можна врахувати вплив маси блока та сили тертя, при його обертанні. Система рівнянь (1.11) та (1.12) у такому випадку матиме вигляд:

$$M\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=M\vec{g}+\vec{T}_1 \qquad (1.18)$$

$$(m+M)\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=(m+M)\vec{g}+\vec{T}_2\ . \qquad (1.19)$$

Слід звернути увагу, що сили з якою нитка діє на важки 1 та 2 ($\vec{T}_1$ та $\vec{T}_2$) тепер не однакові, як це мало місце при невагомому блоці. Крім того, система рівнянь (1.18) та (1.19) має бути доповнена рівнянням обертального руху блоку:

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2} + \vec{M}_T , \qquad (1.20)$$

де I – момент інерції блока, $\vec{\beta}$ – вектор кутового прискорення, $\vec{M}_{T_1}$, $\vec{M}_{T_1}$, $\vec{M}_T$ – моменти сил $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ та сили тертя, відповідно. У проекції на вісь обертання рівняння (1.20) матиме вигляд:

$$I\beta = T_2 r - T_1 r - M_T , \qquad (1.21)$$

де $\beta = a / r$ – модуль кутового прискорення, r – радіус блока. Векторні рівняння (1.18) та (1.19) в проекціях на вісь x є такими:

$$-Ma = Mg - T_1 , \qquad (1.22)$$

$$(M + m)a = (M + m)g - T_2 . \qquad (1.23)$$

Після підстановки (1.22) і (1.23) у рівняння (1.21) отримаємо вираз для прискорення, який враховує масу блока (його момент інерції I прямо пропорційний масі блока) та тертя в осі обертання блока:

$$a = \frac{mg + M_T / r}{m + 2M + I / r^2} . \qquad (1.24)$$

Маса додаткового тягарця m_0, при якій почнеться рух системи, можна визначити з умови:

$$0 = m_0 g + \frac{M_T}{r} \quad \text{або} \quad \frac{M_T}{r} = -m_0 g , \qquad (1.25)$$

що дозволяє отримати вираз для прискорення вільного падіння:

$$g = \frac{(m + 2M + I / r^2)a}{m - m_0} . \qquad (1.26)$$

Вимірювання

У даній роботі необхідно експериментально визначити прискорення вільного падіння. З цією метою слід виконати два експерименти: 1) дослідити час руху важка в залежності від висоти за фіксованої маси додаткового тягарця m та 2) дослідити час руху важків різної маси за фіксованої висоти h.

Для цього необхідно виконати такі дії.

1. Оцінити масу додаткового важка m_0, при якій почнеться рух системи. З цією метою слід послідовно збільшувати з кроком 0,5 г масу додаткового тягарця. Дослід повторити при 3 – 5 різних положеннях блоку.
2. Дослідити залежність часу падіння t важка від висоти h. Вимірювання проводити за фіксованої маси додаткового тягарця $m = (5 - 10)m_0$ та за умови $m << 2M$. Виміри провести для 5 висот. Для кожної висоти виміряти значення t 5 разів. Результати вимірів занести в табл.1.1:

Табл.1.1.

h, м	t_1, с	t_2, с	t_3, с	t_4, с	t_5, с	$\bar{t}$, с	Δt, с	Δh, м

3. Виміряти залежність часу падіння від маси додаткового важка m. Маси слід обирати такими, щоб виконувалась умова

$m_0 << m << 2M$. Висоту слід встановити максимально можливою для даної лабораторної роботи $h_{\max}$. Для кожної маси додаткового тягарця m виміри часу падіння слід провести 5 разів і розрахувати їх середні значення $\bar{t}$ та похибку Δt. Результати занести в табл.1.2:

Табл.1.2.

m, **кг**	$\sqrt{\frac{M}{m}}$	t_1, **с**	t_2, **с**	t_3, **с**	t_4, **с**	t_5, **с**	$\bar{t}$, **с**	Δt, **с**

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. За результатами вимірів в координатах $x = \sqrt{h}$, $y = t$ побудувати графік $t = f\left(\sqrt{h}\right)$. Отриману експериментальну залежність апроксимувати лінійною функцією $t = \alpha\sqrt{h} + \beta$ (див. рис.1.3), де $\alpha = \sqrt{2/a}$. Звідси обчислити прискорення a. Оцінити величину похибки Δa.
2. За формулами (1.17) та (1.26), розрахувати величину прискорення вільного падіння та її похибку. При обчисленні за формулою (1.26) слід знехтувати масою блока, вважаючи що $I = 0$. Пояснити різницю отриманих значень.
3. За отриманими результатами вимірювань залежності часу падіння від маси додаткового важка m (див. п.3 розділу «Вимірювання») побудувати графік $t = f\left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)$ в координатах $x = \sqrt{\frac{M}{m}}$, $y = t$. Отриману експериментальну залежність апроксимувати лінійною функцією $t = \gamma\sqrt{\frac{M}{m}} + \delta$ (див. рис.1.4), де $\gamma = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$. Звідси обчислити прискорення вільного падіння g. Оцінити величину похибки Δg.
4. Порівняти отримані в п.2 та п.3 значення прискорення вільного падіння з відомим табличним значенням для даної місцевості і проаналізувати причини можливих відхилень. Сформулювати висновки.

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1. Радіус-вектор частинки, вектори її швидкості та прискорення. Розкладання цих векторів по ортам прямокутної декартової системи координат. Зв'язок між модулями цих векторів та їх проекціями на координатні осі.
2. Що таке рівномірний, прискорений та рівноприскорений рух тіла?
3. Що таке рівняння руху матеріальної точки. Записати зв'язок між прискоренням та силою, імпульсом та силою.
4. Вивести формули (1.17) і (1.26) для визначення прискорення вільного падіння за допомогою машини Атвуда. У чому відмінність між цими формулами?
5. За яких умов рух важків в машині Атвуда не буде рівноприскореним?

6. Яким чином вплине врахування маси блоку на рух системи?
7. Які недоліки та переваги запропонованого методу визначення прискорення вільного падіння?
8. Чим обумовлені похибки в даній лабораторній роботі?
9. Яким чином можна врахувати величину сил опору, що діють на важок з боку повітря?

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
2. И. Е. Иродов, «Основные законы механики» // Москва, Высшая школа, 1985
   або И. Е. Иродов, «Механика. Основные законы» // Москва–Санкт-Петербург, Физматлит, 2001.
3. С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо, «Практикум по физике. Механика» // Москва, 1990.
4. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Механика» // Москва, Наука, 1979 – 1993.
5. А. Н. Матвеев, «Механика и теория относительности» // Москва, Высшая школа, 1986.

РОБОТА № 2

МАТЕМАТИЧНИЙ І ФІЗИЧНИЙ (ОБОРОТНИЙ) МАЯТНИКИ

Мета роботи

1. Визначити прискорення вільного падіння.
2. Вивчити вільні коливання маятника, що задовольняє моделі математичного маятника, та вільних коливань оборотного маятника.

Опис експериментальної установки

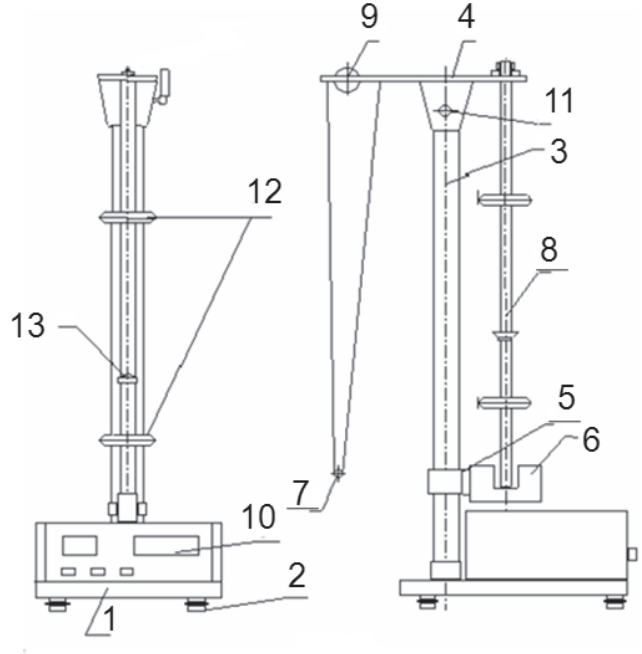


Рис. 2.1. Схема експериментальної установки.

Лабораторна робота виконується на експериментальній установці, зображеній на рис. 2.1. Основа 1 має регульовані опори 2, які дозволяють провести вирівнювання приладу. На ній закріплена колона 3, на якій зафіксовані верхній кронштейн 4 і нижній кронштейн 5 з фотоелектричним датчиком 6. З одного боку кронштейна 4 знаходиться математичний маятник у вигляді маленької металевої кульки 7, підвішеної на двох нитках (біфілярний підвіс), що забезпечує рух кульки лише в одній вертикальній площині, а з іншого боку – фізичний (оборотний) маятник 8. Поворотом верхнього кронштейна можна «розвертати» фотоелектричний датчик у бік математичного чи фізичного маятника. Довжину підвісу математичного маятника можна регулювати за допомогою гвинта 9, а її величину можна визначити за допомогою шкали на колоні 3. Фізичний маятник являє собою сталевий стержень, на якому закріплені дві повернуті одна до одної ножами опорні призми 13 і два масивні диски 12. На стержні через 10 мм виконані кільцеві заглиблення призначені для точного визначення довжини оборотного маятника (відстань між ножами). Ножі й диски можна переміщувати вздовж стержня і фіксувати в будь-якому положенні. Нижній кронштейн 5 разом з фотоелектричним датчиком 6 можна переміщувати уздовж колони 3 і фіксувати в довільно обраному положенні. Поворотом нижнього кронштейна 5 можна спрямовувати фотоелектричний датчик 6 у бік математичного або фізичного маятника. Фотоелектричний датчик 6 електрично сполучений з вимірювачем часу та кількості періодів 10.

Теоретичні відомості

Одним з методів визначення прискорення вільного падіння є аналіз коливних рухів математичного та фізичного маятників.

Математичним маятником називають матеріальну точку, підвішену на невагомому нерозтяжному підвісі в однорідному полі сили тяжіння з можливістю руху в одній площині.

Фізичним маятником називають абсолютно тверде тіло, розміщене в однорідному полі сили тяжіння з можливістю обертання навколо нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через його центр мас

Гармонічні коливання

Коливаннями називають процеси (рухи або зміни стану), які повторюються в часі. В залежності від фізичної природи коливального процесу і механізму його збудження розрізняють: ***механічні коливання*** (коливання маятників, струн, частин машин і механізмів, будов, мостів та ін. споруд, тиску повітря при розповсюдженні в ньому звуку, хитання корабля, хвилювання моря і т.п.); ***електромагнітні*** (коливання змінного електричного струму в колі, коливання векторів **E** і **B** – електричної напруженості і магнітної індукції змінного електромагнітного поля і т.д.); ***електромеханічні*** (коливання мембрани телефону, дифузора електродинамічного гучномовця і т.п.) та ін.

Коливання називаються ***періодичними***, якщо значення фізичних параметрів, які характеризують коливну систему і змінюються при коливаннях, повторюються через рівні проміжки часу. Найменший проміжок часу T, що відповідає такій умові, називається ***періодом коливань***. За ***період*** коливань T система здійснює одне ***повне коливання***. ***Частотою*** періодичних ***коливань*** називається величина $\nu = 1/T$, яка дорівнює кількості повних коливань, що відбуваються в одиницю часу. ***Циклічною***, або ***коловою частотою*** періодичних ***коливань*** називається величина $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, рівна кількості повних коливань, які відбуваються за 2π одиниць часу. Якщо фізичну величину, що змінюється у часі при коливаннях позначити як $s(t)$, то при періодичних незгасаючих коливаннях її залежність від часу t задовольняє умові $s(t+T) = s(t)$. Так, наприклад, під s можна розуміти величину зміщення тіла, що здійснює коливання, від положення рівноваги.

Періодичні коливання величини $s(t)$ називаються ***гармонічними коливаннями***, якщо

$$s(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0) \quad \text{або} \quad s(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0), \qquad (2.1)$$

де $A=s_{\max}=\text{const}>0$ – максимальне значення величини $s(t)$, яку називають ***амплітудою коливань***, а аргумент тригонометричної функції $\varphi(t)=\omega t+\varphi_0$ називають ***фазою коливань.***. Стала величина φ_0 називається ***початковою фазою коливань***, оскільки φ_0 є значенням $\varphi(t)$ у початковий момент часу $t=0$: $\varphi_0=\varphi(0)$. Зауважимо, що момент $t=0$ – це початок відліку часу t, а не момент початку процесу коливань. Гармонічні коливання існують на інтервалі $t=(-\infty,\infty)$. Зрозуміло, що такі коливання без початку і без кінця – це граничне поняття, математична абстракція. Оскільки функції синуса і косинуса перетворюються одна в одну при додаванні до аргументу величини $\pi/2$, що еквівалентно зміні початку відліку часу на величину $\Delta t=\dfrac{\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi T}{2\cdot 2\pi}=\dfrac{T}{4}$, де T – період коливань, то надалі ми будемо розглядати лише одне з вищенаведених представлень гармонічних коливань, а саме, $s(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)$.

Перша та друга похідні за часом від гармонічної коливної величини $s(t)$ також характеризують коливання з такою ж циклічною частотою:

$$\frac{ds}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0), \qquad (2.2)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0), \qquad (2.3)$$

причому амплітуди ds/dt і d^2s/dt^2 відповідно дорівнюють $A\omega$ і $A\omega^2$. Різниця фаз коливань ds/dt і s стала і дорівнює $\pi/2$ (це різниця фаз між коливаннями, які описують функції $\sin(\omega t+\varphi_0)$ і $\cos(\omega t+\varphi_0)$). Іншими словами, коливання фізичної величини ds/dt випереджають за фазою коливання величини s на $\pi/2$, а за часом на чверть періоду коливань $T/4$. Аналогічно, різниця фаз коливань d^2s/dt^2 і s дорівнює π (це різниця фаз між функціями $\sin(\omega t+\varphi_0)$ і $-\sin(\omega t+\varphi_0)$). Отже, d^2s/dt^2 випереджає s за фазою на π, а за часом на половину періоду коливань $T/2$. Графіки залежностей від часу величин s, ds/dt і d^2s/dt^2 при гармонічних коливаннях для випадку $\varphi_0=0$ наведені на рис. 2.2.

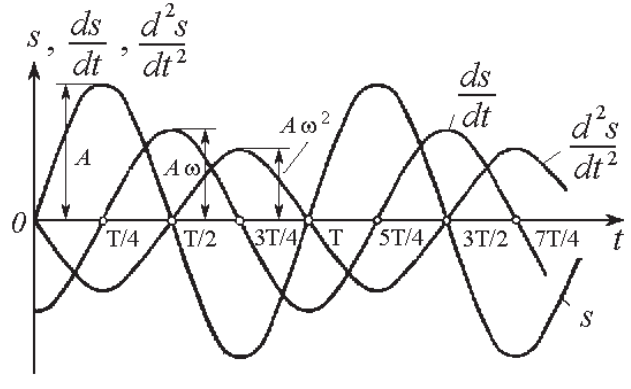


Рис.2.2. Часові залежності зміщення, швидкості та прискорення при гармонічних коливаннях.

Прямою підстановкою можна переконатись, що гармонічні коливні функції (2.1) задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0, \qquad (2.4)$$

яке називається рівнянням гармонічного осцилятора. Загальним розв'язком такого рівняння є функція

$$s(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t). \qquad (2.5)$$

Математичний маятник

Покажемо, що за малих амплітуд коливань математичний маятник можна вважати гармонічним осцилятором. Розглянемо рух математичного маятника, зображеного на рис.2.3, де l – довжина підвісу (відстань від матеріальної точки до точки закріплення підвісу), а m – маса матеріальної точки. До матеріальної точки прикладені дві сили (рис. 2.3): однорідна сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила $\vec{T}$ з боку підвісу. Дисипативною силою опору, що діє на маятник з боку повітря, можна знехтувати, якщо маятник після виведення з положення рівноваги здатний здійснити декілька десятків коливань до повної зупинки. Отже, рівняння руху матеріальної точки (математичного маятника) має вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}. \qquad (2.6)$$

Його необхідно розв'язувати з урахуванням наявності зв'язку, що обмежує рух матеріальної точки в одній вертикальній площині, причому $l = const$. Це означає, що матеріальна точка m рухається в площині рис. 2.3 по траєкторії, яка являє собою дугу кола з центром в точці підвісу. Спроектуємо рівняння (2.6) на напрямки дотичної та нормалі до траєкторії, що задані одиничними векторами $\vec{\tau}$ та $\vec{n}$:

$$ma_\tau = -mg\sin\theta, \qquad (2.7)$$

$$ma_n = mg\cos\theta - T, \qquad (2.8)$$

де θ – центральний кут між поточним напрямком вектору нормалі $\vec{n}$ і напрямком вектора $\vec{g}$. Враховуючи, що $a_\tau = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$, а $s = l\theta$, рівняння (2.7) можна переписати у вигляді

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta. \qquad (2.9)$$

Оскільки за малих кутів відхилення $\sin\theta \approx \theta$, то остаточно маємо рівняння руху математичного маятника у вигляді

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0, \qquad (2.10)$$

де введено позначення

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (2.11)$$

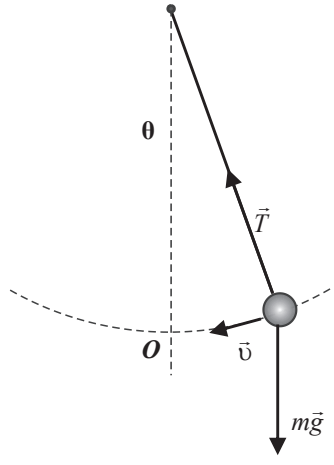


Рис. 2.3. Математичний маятник.

Величина ω_0 має розмірність частоти і залежить виключно від довжини маятника і величини прискорення вільного падіння в місці його розташування. Її називають циклічною ***частотою власних коливань*** маятника. Оскільки рівняння (2.10) за формою збігається з рівнянням гармонічного осцилятора (рівняння (2.4)), то звідси можна зробити висновок, що малі коливання математичного маятника є гармонічними і відбуваються за законом:

$$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (2.12)$$

Відповідно, *власний* період малих коливань математичного маятника дорівнює:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (2.13а)$$

а отже прискорення вільного падіння може бути визначене як

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \qquad (2.13б)$$

Підкреслимо, що отриманий вище вираз для періоду (2.13) справедливий лише для малих коливань. При зростанні амплітуди коливань період коливань збільшується відповідно до формули

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right], \qquad (2.14)$$

яка переходить у формулу (2.13) за $\theta_0 \to 0$. Це збільшення дуже повільне: похибка формули (2.14) порівняно із формулою (2.13) не перевищує 0,05 % за амплітуди коливань $\theta_0 \approx 5°$ і сягає 1 % за амплітуди коливань $\theta_0 \approx 23°$, саме тому формула (2.13) має широке практичне застосування.

Зауважимо, що рівняння гармонічного осцилятора для математичного маятника може бути отримане за допомогою закону збереження механічної енергії. Знову знехтуємо дисипативною силою опору повітря, яка призводить до втрат енергії математичного маятника на роботу проти цієї сили Тоді можна вважати що повна механічна енергія маятника буде зберігатися:

$$E = T + U = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgh = const, \qquad (2.15)$$

де T і U – кінетична та потенціальна енергія маятника відповідно, $h = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta) = 2l\sin^2\frac{\theta}{2}$ – висота, на яку піднімається центр мас кульки від положення рівноваги. Оскільки кулька

здійснює рух по колу, то її швидкість $\upsilon = \omega l = l\frac{d\theta}{dt}$. Таким чином, рівність (2.15) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2mgl\sin^2\frac{\theta}{2} = const. \qquad (2.16)$$

За умови малих коливань $\sin\theta/2 \approx \theta/2$, а тому рівність (2.17) набуде вигляду

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2mgl\frac{\theta^2}{4} = const \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = const. \qquad (2.18)$$

Після диференціювання останнього виразу за часом отримаємо

$$\frac{1}{2}ml^2\cdot 2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2}mgl\cdot 2\theta\frac{d\theta}{dt} = 0. \qquad (2.19)$$

і після спрощень отримаємо рівняння гармонічного осцилятора (2.9)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \qquad (2.20)$$

Фізичний маятник

Покажемо, що за малих амплітуд коливань фізичний маятник, так само як і математичний маятник, можна вважати гармонічним осцилятором. Розглянемо рух фізичного маятника, зображеного на рис.2.4, у вигляді абсолютно твердого тіла довільної форми, здатного обертатися навколо нерухомої горизонтальної осі O, яка не проходить через центр мас тіла C (рис. 2.4) і має назву ***осі гойдання маятника***. Точка O перетину осі гойдання маятника з *вертикальною* площиною, яка проходить через центр мас маятника і перпендикулярна до осі гойдання, називається ***точкою підвісу маятника***.

Для опису руху такого маятника застосуємо основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла у вигляді

$$I\vec{\beta} = \vec{M}\,, \qquad (2.21)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі обертання, $\vec{\beta}$ – кутове прискорення маятника, а $\vec{M}$ – векторна сума моментів усіх сил, прикладених до маятника відносно осі обертання. Впливом дисипативних сил опору з боку повітря та сил тертя з боку осі обертання будемо нехтувати. За цих умов момент $\vec{M}$ відносно осі обертання (точки *O* на рис. 2.4) створюється лише силою тяжіння $m\vec{g}$ прикладеною до центру мас маятника *C*. Момент сили реакції прикладеної до маятника з боку осі обертання відносно осі обертання дорівнює нулю (точки *O* на рис. 2.4). Отже момент сили $\vec{M} = [\vec{R}_c \times m\vec{g}]$, де $\vec{R}_c$ – радіус-вектор центру мас *C* відносно точки *O*. Цей момент направлений так, що створює прискорення в напрямку положення рівноваги, тобто він намагається повернути маятник до положення рівноваги. Його модуль дорівнює $M = mgd\sin\theta$, де m – маса маятника, g – прискорення вільного падіння, d – відстань від точки підвісу *O* до центру мас *C*. Спроектуємо рівняння (2.21) на напрям кутової швидкості маятника, який паралельний осі обертання маятника, і отримаємо рівняння обертального руху маятника:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta\,. \qquad (2.22)$$

Знак «–» показує, що момент сили тяжіння намагається повернути маятник у положення рівноваги, причому знак кутового прискорення створюваного цим моментом завжди протилежний знаку відхилення маятника від положення рівноваги.

За малих коливаннях маятника (малих відхиленнях від положення рівноваги) $\sin\theta \approx \theta$, і рівняння руху маятника набуде вигляду

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0\,, \qquad (2.23)$$

тобто рівняння (2.23) є рівнянням гармонічного осцилятора (2.4). Таким чином, за відсутності сил опору малі коливання фізичного маятника є гармонічними:

$$\theta = \theta_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \qquad (2.24)$$

де θ_0 – амплітуда коливання. При цьому циклічна частота і період малих коливань фізичного маятника визначатимуться співвідношеннями

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{і} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\,. \qquad (2.25)$$

Оскільки математичний маятник є частинним випадком фізичного, то з виразу для періоду коливань фізичного маятника (2.25) легко отримати вираз для періоду коливань математичного маятника. Дійсно, враховуючи, що момент інерції математичного маятника – це момент інерції точкової маси m, що знаходиться від осі на відстані l, тобто $I = ml^2$, отримаємо $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Аналогічно математичному маятнику рівняння гармонічного осцилятора для фізичного маятника може бути отримане за допомогою закону збереження механічної енергії. Нехтуючи впливом сил опору з боку повітря та сил тертя з боку осі обертання, можна вважати, що механічна енергія фізичного маятника буде зберігатися:

$$E = T + U = \frac{I\omega^2}{2} + mgh = const\,, \qquad (2.26)$$

де T і U – кінетична та потенціальна енергія маятника відповідно, $h = d - d\cos\theta = d(1-\cos\theta) = 2d\sin^2\frac{\theta}{2}$ – висота, на яку

піднімається центр мас маятника від положення рівноваги. Оскільки $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, то рівняння (2.26) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2mgd \sin^2 \frac{\theta}{2} = const \,. \qquad (2.27)$$

За умови малих коливань $\sin\theta/2 \approx \theta/2$, а тому рівняння (2.27) набуде вигляду

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2mgd \frac{\theta^2}{4} = const \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mgd\theta^2 = const \,. \qquad (2.28)$$

Диференціюючи це рівняння по часу, отримаємо

$$\frac{1}{2} I \cdot 2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} mgd \cdot 2\theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \,. \qquad (2.29)$$

Спрощуючи цей вираз, отримаємо

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \theta = 0 \,, \qquad (2.30)$$

тобто ми отримали рівняння гармонічного осцилятора (2.23).

З порівняння формул для періодів коливань математичного (2.13) та фізичного маятників (2.25)можна зробити висновок, що ***фізичний маятник коливається так само, як математичний маятник з довжиною***

$$l_{зв} = \frac{I}{md} \,, \qquad (2.31)$$

яку називають ***зведеною довжиною*** фізичного маятника. Нагадаємо, що за теоремою Штейнера момент інерції тіла I відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції цього тіла I_C відносно осі, що проходить через центр мас C та паралельна до даної, та добутку маси тіла m на квадрат відстані d^2 між цими

осями: $I = I_C + md^2$. Якщо підставити даний вираз у формулу для зведеної довжини (2.27), то можна отримати:

$$l_{зв} = \frac{I}{md} = d + \frac{I_C}{md} > d \,. \qquad (2.32)$$

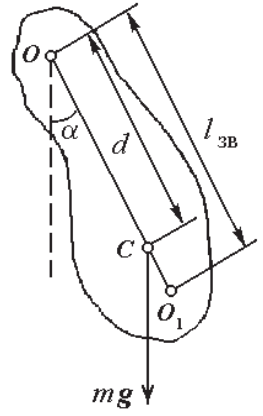


Рис. 2.4. Фізичний маятник.

Точка O_1, що знаходиться на прямій OC на відстані $l_{зв}$ від точки підвісу маятника O, називається ***центром гойдання фізичного маятника***. Центр гойдання та точка підвісу мають властивість взаємності: якщо маятник підвісити таким чином, щоб вісь гойдання проходила через точку O_1, то точка O буде збігатися з новим положенням центру гойдання маятника, тобто зведена довжина і період коливань фізичного маятника залишаться незмінними. Період коливань фізичного маятника T, як і зведена довжина $l_{зв}$, залежать від відстані d між центром мас маятника та точкою підвісу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + md^2}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{зв}}{g}} \,, \qquad (2.33а)$$

звідки прискорення вільного падіння

$$g = \frac{4\pi^2 l_{зв}}{T^2}. \qquad (2.33б)$$

Залежність періоду коливань від відстані від точки підвісу до центра мас C по обидва боки від точки C наведена на рис. 2.5. На рисунку показано, що один і той самий період коливань може реалізуватися відносно будь-яких чотирьох осей, які розташовані попарно по різні боки від центра мас. Можливі такі форми твердого тіла, коли вісь обертання, віддалена на відстань d_2', знаходиться поза маятником.

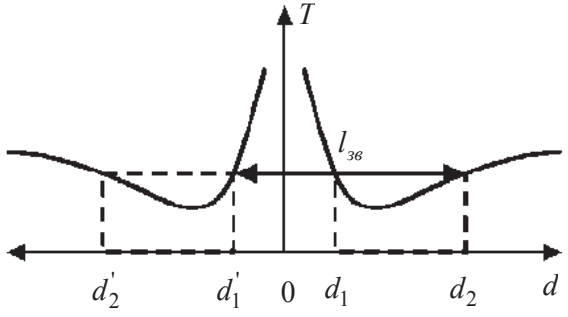


Рис. 2.5. Залежність періоду коливань фізичного маятника від відстані між точкою підвісу та центром мас d.

Оборотний маятник

Для будь-якого фізичного маятника завжди можна вказати таку пару паралельних осей, періоди коливань відносно яких однакові, а відстань між ними дорівнює зведеній довжині фізичного маятника. Доведемо це твердження. На рис. 2.6 зображено фізичний маятник, який може коливатися відносно однієї з двох паралельних осей, які перпендикулярні до площини рисунка і проходять через точки A та B. Такий маятник називають ***оборотним***. За теоремою Штейнера моменти інерції відносно цих осей становлять, відповідно:

$$I_A = I_C + md_2^2 \quad \text{та} \quad I_B = I_C + md_1'^2, \qquad (2.34)$$

а періоди малих коливань фізичного маятника відносно цих осей дорівнюють

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + md_1'^2}{mgd_1'}} \quad \text{та} \quad T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + md_2^2}{mgd_2}}. \qquad (2.35)$$

Якщо положення осей обрані таким чином, що періоди коливань відносно них однакові $T_A = T_B$, то

$$\frac{I_C + md_2^2}{mgd_2} = \frac{I_C + md_1'^2}{mgd_1'}, \qquad (2.36)$$

звідки випливає, що $I_C = md_1'd_2$. Якщо підставити останній вираз в будь-яке з рівнянь для T_A або T_B, то отримаємо:

$$T_A = T_B = 2\pi\sqrt{\frac{md_1'd_2 + md_2^2}{mgd_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{d_1' + d_2}{g}}. \qquad (2.37)$$

Отже, твердження про існування для довільного тіла пари таких паралельних осей, періоди коливань відносно яких однакові, а відстань між ними дорівнює зведеній довжині фізичного маятника $l_{зв} = d_1' + d_2$ доведено.

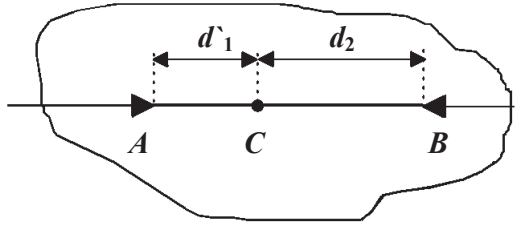


Рис. 2.6. Фізичний маятник з різними точками підвісу A та B.

Оборотний фізичний маятник було винайдено британським фізиком Генрі Кейтером у 1817 р. спеціально для вимірювання

прискорення вільного падіння в місці розташування маятника. Його головна перевага перед іншими практичними реалізаціями фізичних маятників полягає в усуненні необхідності відшукання центру мас і центру гойдання, що значно підвищило точність вимірювань. З цією метою вимірюють залежність періоду коливань від положення осі обертання і за цією залежністю визначають зведену довжину. Визначені величини $l_{зв}$ та період коливань відносно обох осей дозволяють розрахувати g.

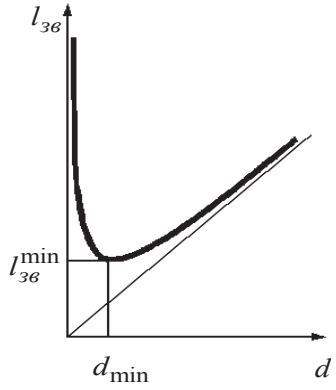


Рис. 2.7. Залежність зведеної довжини фізичного маятника від d.

З практичної точки важливим є той факт, що зведена довжина є функцією відстані d і має мінімум при $d_{\min}^2 = \frac{I_C}{m}$ (рис.2.7). Мінімальна величина зведеної довжини, яка відповідає закріпленню маятника на відстані $d_{\min}$ від центра мас, дорівнює $l_{зв}^{\min} = 2\sqrt{\frac{I_C}{m}}$. Наявність мінімуму показує, що в цій області незначні зміни відстані до центра мас в першому наближенні не мають суттєвого впливу на $l_{зв}$, а отже і на період коливань фізичного маятника. Цей факт був використаний Шулером при конструюванні маятникового годинника високої точності. Маятник, в якому виконується умова мінімуму, називається ***мінімальним маятником*** або ***скомпенсованим маятником***.

ВИМІРЮВАННЯ

1. Математичний маятник

1.1. Встановити і виміряти однакові довжини ниток $l > 50$ см таким чином, щоб риска на кульці була продовженням риски на корпусі фотоелектричного датчика.

1.2. Відхилити нитку (кульку) на малий кут $4–5^0$ від положення рівноваги, натиснути кнопку “сброс”. При першому перетинанні кулькою пучка світла фотореєстратора вмикається секундомір і лічильник періодів коливань. Після $n = 9$ повних коливань натиснути кнопку “стоп” і обчислити період коливань $T = t/n$ ($n = 10$), де t – це час, за який здійснюється n повних коливань.

1.3. Величину періоду коливань T в описаний вище спосіб визначити 10 разів.

1.4. Результати вимірювань занести в табл.2.1.

1.5. Обчислити середнє значення $\overline{T}$ та похибку ΔT періоду.

Табл.2.1.

Номер досліду	t, с	T, с	$\overline{T}$, с	l, см
1				
2				
3				
…				
10				

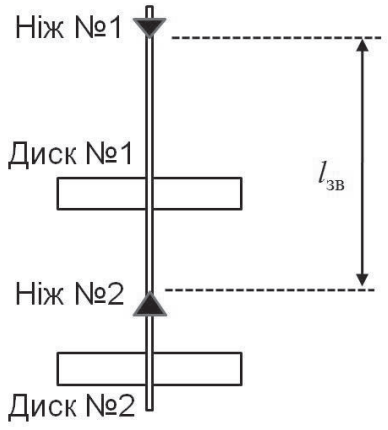


Рис. 2.8. Фізичний (оборотний) маятник, що використовується у роботі.

2. Фізичний (оборотний) маятник.

2.1. Зафіксувати диски на стержні несиметрично, таким чином, щоб один з них знаходився поблизу кінця, а другий – поблизу середини стержня. Ножі підвісів закріпити лезами до середини стержня, ніж №1 поблизу вільного кінця стержня, а ніж №2 приблизно посередині між дисками (рис.2.8).

2.2. Підвісити маятник на ножі №1, що поблизу кінця стержня. Нижній кронштейн з фотоелектричним датчиком перемістити таким чином, щоб стержень перетинав оптичну вісь датчика. Відхилити стержень на кут $4–5^0$ і відпустити. Натиснути кнопку “сброс”. Після дев’яти повних коливань натиснути клавішу “стоп”. Визначити період $T_{ф1} = t/10$.

2.3. Зняти маятник і підвісити його на ножі №2. Виміряти період коливань $T_{ф2} = t/10$.

2.4. Не змінюючи положення обох дисків і першого ножа, помалу переміщувати ніж №2 вздовж стержня (вгору чи вниз), добиваючись рівності $T_{ф2} \approx T_{ф1}$. Періоди $T_{ф1}$ і $T_{ф2}$ вважати рівними, якщо ці величини відрізняються менше, ніж на 0,5%.

2.5. Виміряти відстань між ножами №1 та №2 після того, коли досягнуто умову п.2.4. Цю величину називають зведеною довжиною фізичного маятника $l_{зв}$.

Експериментальні завдання

1. Використовуючи середні значення виміряних величин, згаданих в п.1 розділу «Вимірювання», за формулою (2.13б) розрахувати прискорення вільного падіння.
2. Використовуючи середні значення виміряних величин зведеної довжини фізичного маятника, періоду коливань $T = T_{ф2} \approx T_{ф1}$, згаданих в п.2 розділу «Вимірювання», за формулою (2.33б) розрахувати прискорення вільного падіння.
3. Розрахувати абсолютну випадкову, абсолютну систематичну та повну абсолютну похибки визначення величин g (як для експерименту з математичним маятником, так і для експерименту з фізичним маятником). Записати довірчі інтервали визначених прискорень вільного падіння. Пояснити можливі причини виникнення похибки.
4. Порівняти отримані результати з табличними даними прискорення вільного падіння для даної широти місцевості (g = 9,81 м/с^2 для Києва).

Теоретичні завдання

1. Дати означення коливного процесу (коливання). Пояснити, що таке гармонічні коливання. Пояснити, за якої умови коливання будуть гармонічними.
2. Записати рівняння гармонічних коливань (рівняння гармонічного осцилятора) та його розв’язок. Пояснити, що таке амплітуда, частота, період та фаза коливань.

3. Записати рівняння руху математичного маятника, звівши його до рівняння гармонічного осцилятора. Отримати вирази для частоти та періоду гармонічних коливань математичного маятника.
4. Виходячи з закону збереження енергії, отримати рівняння гармонічних коливань, вирази для частоти і періоду коливань математичного маятника.
5. Записати рівняння руху фізичного маятника, звівши його до рівняння гармонічного осцилятора. Отримати вирази для частоти та періоду гармонічних коливань фізичного маятника.
6. Виходячи з закону збереження енергії, отримати рівняння гармонічних коливань, вирази для частоти і періоду коливань фізичного маятника.
7. Пояснити фізичний зміст зведеної довжини фізичного маятника. Вивести формулу, що визначає частоту і період гармонічних коливань фізичного (оборотного) маятника через зведену довжину.
8. Скориставшись виразом для періоду коливань фізичного маятника (2.33а) отримати вираз для періоду коливань математичного маятника.
9. Пояснити залежність прискорення вільного падіння від широти місця, в якому воно визначається.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронна версія // Київ, 2013.
2. И. Е. Иродов, «Основные законы механики» // Москва, Высшая школа, 1985
   або И. Е. Иродов, «Механика. Основные законы» // Москва–Санкт-Петербург, Физматлит, 2001.
3. С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо, «Практикум по физике. Механика» // Москва, 1990.
4. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Механика» // Москва, Наука, 1979 – 1993.
5. А. Н. Матвеев, «Механика и теория относительности» // Москва, Высшая школа, 1986.
6. Джерела в Інтернеті:
   https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum
   https://en.wikipedia.org/wiki/Simple_harmonic_motion
   https://en.wikipedia.org/wiki/Kater%27s_pendulum

РОБОТА № 3

МАЯТНИК ОБЕРБЕКА

Мета роботи

1. Дослідити динаміку обертального руху твердого тіла на прикладі маятника Обербека.
2. Експериментально перевірити рівняння моментів для обертання тіла навколо нерухомої осі.

Опис експериментальної установки

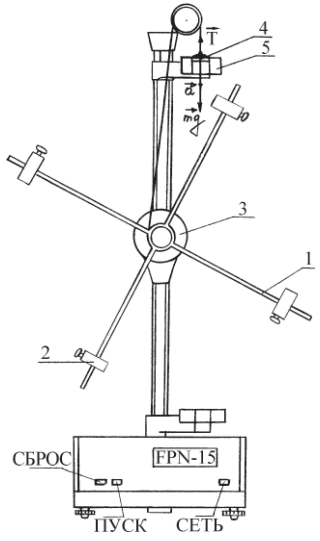


Рис.3.1. Схема експериментальної установки

Маятник Обербека являє собою чотири спиці (1), закріплені на втулці (3) під прямим кутом (рис. 3.1). На спицях (1) розміщені чотири муфточки (2) масою $m_т$ кожна, з гвинтами для закріплення на спицях. Втулка (3) і два жорстко зв'язані з нею шківи з радіусами r_1 і r_2 насаджені на спільну горизонтальну вісь, закріплену в підшипниках для зменшення тертя при обертанні. Пересуванням муфточок вздовж спиць можна легко змінювати

момент інерції I маятника. На один із шківів намотана нитка з закріпленою на кінці платформою (4), на яку можна класти тягарці (5). Змінюючи кількість тягарців, можна змінювати силу натягу нитки, а отже і момент сили прикладений до маятника.

Теоретичні відомості

Умови зміни та збереження моменту імпульсу системи частинок. Рівняння обертального руху абсолютно твердого тіла (рівняння моментів)

Моментом імпульсу частинки з імпульсом $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ (m – маса частинки, $\vec{\upsilon}$ – її швидкість), положення якої відносно деякої точки визначається радіус-вектором $\vec{r}$, називається фізична величина

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \qquad (3.1)$$

Для знаходження умов зміни з часом та збереження моменту імпульсу частинки необхідно дослідити його похідну за часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}([\vec{r} \times \vec{p}]) = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon}] + [\vec{r} \times \vec{F}]. \qquad (3.2)$$

Доданок $[\vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon}] = 0$ внаслідок колінеарності співмножників, а векторна величина $[\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$ називається ***моментом сили*** $\vec{F}$. Отже, момент імпульсу частинки змінюється під дією суми моментів прикладених до неї сил,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad (3.3)$$

причому елементарний приріст вектора моменту імпульсу частинки $d\vec{L}$ співпадає за напрямком з напрямком вектора моменту сили. Рівняння (3.3) часто називають *рівнянням моментів*. Отже, **умова збереження моменту імпульсу частинки: момент імпульсу частинки зберігається, якщо сумарний момент усіх сил, прикладених до частинки, дорівнює нулю.** Так само як і імпульс, момент імпульсу вільної частинки зберігається без будь-яких умов, оскільки за означенням на вільну частинку не діють ніякі сили, а отже сумарний момент сил завжди дорівнює нулю.

Аналогічно для моменту імпульсу системи частинок $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$ можна отримати:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{вн} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{зовн} \qquad (3.4)$$

На підставі третього закону Ньютона можна показати, що якщо між частинками системи діють лише центральні сили, то їх сумарний момент завжди дорівнює нулю ($\vec{M}^{вн} = 0$). Враховуючи це, отримуємо ***умови зміни та збереження*** моменту імпульсу системи частинок:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{зовн}, \qquad (3.5)$$

тобто **момент імпульсу системи частинок змінюється, якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, відмінний від нуля; момент імпульсу системи частинок зберігається, якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, дорівнює нулю.** Для замкненої системи частинок справедливий ***закон збереження моменту імпульсу***: **момент імпульсу замкненої системи частинок є величина стала**.

Введемо поняття ***центра мас*** або ***центра інерції*** системи частинок. Центром мас системи частинок називається точка, положення якої відносно початку відліку задається радіус-вектором $\vec{R}_C$

$$\vec{R}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i(t), \qquad (3.6)$$

де $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – повна маса системи частинок, а $\vec{r}_i(t)$ – радіус-вектор, що задає положення *i*-ї частинки. При аналізі руху системи частинок зручно користуватись спеціальною системою відліку яку називають ***системою центру мас*** або скорочено ***Ц-системою***. **Системою центру мас називається система відліку, початок відліку якої відносно центру мас системи частинок є нерухомим, тобто Ц-система – це система відліку, в якій система частинок як ціле знаходиться в спокої.** Ц-систему іноді також називають ***власною системою відліку*** системи частинок**.** Часто (але не обов'язково) початок власної системи відліку обирають в центрі мас системи частинок. При такому виборі початку Ц-системи рівняння (3.5) має вигляд:

$$\frac{d\tilde{\vec{L}}}{dt} = \tilde{\vec{M}}_C^{зовн}, \qquad (3.7)$$

де $\tilde{\vec{L}}$ – власний момент імпульсу системи частинок (момент імпульсу, визначений відносно довільної точки, нерухомої відносно Ц-системи, зокрема, відносно центру мас), $\tilde{\vec{M}}_C^{зовн}$ – сумарний момент зовнішніх сил відносно центру мас.

Абсолютно тверде тіло можна означити як систему частинок, відстані між якими не змінюються в процесі руху цієї системи. Таким чином, якщо при русі твердого тіла у ньому відсутні деформації, то це тіло є абсолютно твердим. Зрозуміло, що реальне тверде тіло можна вважати абсолютно твердим, якщо при його русі абсолютна величина деформацій тіла є набагато меншою ніж його розміри. Зауважимо, що в даній лабораторній роботі маятник Обербека добре описується моделлю абсолютно твердого тіла. Умови зміни та збереження моменту імпульсу системи частинок будемо шукати так само як і для однієї частинки.

У випадку твердого тіла рівняння моментів (3.7) є рівнянням його обертального руху.

Зв'язок між лінійними та кутовими кінематичними величинами при обертальному русі

При обертанні твердого тіла його довільної точка *P* рухається по коловій траєкторії (рис.3.2). З очевидних геометричних міркувань випливає простий зв'язок між модулем елементарного приросту $|d\vec{r}|$ радіус-вектора $\vec{r}$ точки *P* та нескінченно малим кутом повороту $d\varphi$ її радіус-вектора $\vec{r}$:

$$|d\vec{r}| = d\varphi \cdot r \sin\theta, \text{ або } d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}], \qquad (3.8)$$

де введено ***вектор нескінченно малого повороту*** $d\vec{\varphi}$ напрямлений вздовж осі обертання як показано на рис.3.2.

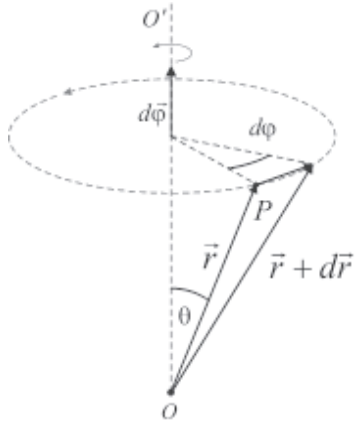


Рис. 3.2. До зв'язку між лінійними та кутовими величинами при обертальному русі.

Після диференціювання виразу (3.8) за часом, отримаємо:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\times\vec{r}\right] \quad \text{або} \quad \vec{\upsilon}=[\vec{\omega}\times\vec{r}]. \tag{3.9}$$

Диференціювання останнього виразу з (3.9) за часу часом дає:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right]+\left[\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right]=$$

$$=[\vec{\beta}\times\vec{r}]+[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}]=[\vec{\beta}\times\vec{r}]+[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]. \tag{3.10}$$

Перший доданок являє собою тангенціальну складову прискорення точки твердого тіла, а другий доданок його нормальну складову.

Тензор інерції твердого тіла. Момент інерції твердого тіла відносно осі обертання

Оскільки єдиною і вичерпною характеристикою обертального руху абсолютно твердого тіла є вектор його кутової швидкості $\vec{\omega}$,

для застосування рівняння (3.7) до обертального руху абсолютно твердого тіла необхідно знайти зв'язок між вектором власного моменту імпульсу $\tilde{\vec{L}}$ та вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$ абсолютно твердого тіла. Якщо уявно розбити тверде тіло на сукупність малих елементів, які можна вважати матеріальними точками, з масами Δm_i та радіус-векторами $\vec{r}_i$, то момент імпульсу цього тіла можна записати як суму моментів імпульсу всіх його елементів

$$\tilde{\vec{L}}=\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i\times(\Delta m_i\vec{\upsilon}_i)]=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i[\vec{r}_i\times\vec{\upsilon}_i]. \tag{3.11}$$

При обертальному русі лінійна та кутова швидкості матеріальної точки зв'язані співвідношенням (3.9) $\vec{\upsilon}_i=[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]$, звідки, використовуючи відому формулу $[\vec{a}[\vec{b}\times\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, отримаємо:

$$\tilde{\vec{L}}=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i[\vec{r}_i\times[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]]=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i[\vec{\omega}r_i^2-\vec{r}_i(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})]. \tag{3.12}$$

Оскільки у твердому тілі маса розподілена неперервно, від сумування по Δm_i у (3.12) можна перейти до інтегрування по всьому об'єму абсолютно твердого тіла. Відповідно вираз для проекції вектора моменту імпульсу на вісь α деякої декартової системи координат набуде вигляду:

$$\tilde{L}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{3}\int_V\rho(r^2\delta_{\alpha\beta}-r_\alpha r_\beta)\omega_\beta dV, \tag{3.13}$$

де $\rho=\rho(x,y,z)$ – густина тіла, $\vec{r}$ – радіус-вектор, $\alpha,\beta=1,2,3$, причому координаті x відповідає 1, координаті y – 2, координаті z – 3; r_α та r_β – відповідні координати радіус-вектора $\vec{r}$; $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, що приймає значення 1 при $\alpha=\beta$ та 0 при $\alpha\neq\beta$. Уведемо позначення

$$I_{\alpha\beta}=\int_V\rho(r^2\delta_{\alpha\beta}-r_\alpha r_\beta)dV. \tag{3.14}$$

Дев'ять скалярних величин $I_{\alpha\beta}$, які залежать виключно від розподілу мас в твердому тілі, називаються *компонентами*

тензора інерції. 9 компонент тензора інерції встановлюють лінійний зв'язок між 3 компонентами вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ і 3 компонентами вектора власного моменту імпульсу $\tilde{\vec{L}}$ відповідно до виразу (3.13), який тепер можна записати більш компактно:

$$\tilde{L}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}\omega_\beta \,, \qquad (3.15а)$$

або в ще більш компактному і загальному, так званому *безкоординатному* вигляді

$$\tilde{\vec{L}} = \hat{I}\cdot\vec{\omega}, \qquad (3.15б)$$

де символом $\hat{I}$ позначено ***тензор інерції*** твердого тіла**,** який встановлює лінійний зв'язок між компонентами векторів власного моменту імпульсу $\tilde{\vec{L}}$ та кутової швидкості $\vec{\omega}$ абсолютно твердого тіла відповідно до рівності (3.15а). Тензор інерції в будь якій просторовій системі координат повністю визначається своїми дев'ятьма компоненти подібно до вектора, який визначається своїми трьома компонентами. Зауважимо, що хоча компоненти тензора обчислені в різних системах координат у загальному випадку будуть різними, сам тензор при цьому не змінюється, так само як не змінюється ані вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$, ані вектор власного моменту імпульсу $\tilde{\vec{L}}$, хоча їх компоненти в різних системах координат також будуть різними. Вираз (3.15б) є дуже важливим для динаміки твердого тіла, оскільки, по-перше, кутова швидкість, з якою обертається тверде тіло, в кожний момент часу не залежить від вибору осі обертання, що дає підставу **вважати величину $\vec{\omega}$ єдиною (абсолютною) характеристикою обертального руху твердого тіла** і називати її кутовою швидкістю обертання твердого тіла як такого, не вказуючи точку, до якої вона віднесена; по-друге, такий запис виразу для тензора інерції є дуже зручним, оскільки він не потребує вказівки на ту чи іншу систему координат.

Так само, як 3 компоненти (координати) векторів записують у вигляді упорядкованих рядків або стовпців, 9 компонент тензора інерції прийнято записувати у вигляді впорядкованої квадратної

матриці 3х3. Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що компоненти тензора інерції мають властивість $I_{\beta\alpha} = I_{\alpha\beta}$, тобто тензор інерції є симетричним і має лише 6 незалежних компонент. Відповідним одночасним вибором певної орієнтації координатних осей системи координат можна всі діагональні компоненти тензора інерції $I_{\beta\alpha} = I_{\alpha\beta}$ перетворити на нуль, в результаті чого матриця компонент тензора інерції набуде діагонального вигляду:

$$\hat{I} = [I_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}. \qquad (3.16)$$

Така система координат називається ***головною*** або ***власною*** системою координат цього тензора.

Тензор інерції визначає інерційні властивості твердого тіла при його обертанні. Величини $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ називаються **головними моментами інерції** абсолютно твердого тіла. Вони визначають інерційні властивості (є кількісними мірами інертності) абсолютно твердого тіла щодо обертання навколо осей, що співпадають з головними осями тензора інерції. Дійсно, в головній системі координат тензора інерції система рівнянь (3.15а) набуде вигляду:

$$L_\alpha = I_\alpha\omega_\alpha \,. \qquad (3.17)$$

Тоді **основне рівняння динаміки обертального руху (3.7) (рівняння моментів)**, записане в проекціях на осі головної системи координат, матиме вигляд:

$$I_\alpha \frac{d\omega_\alpha}{dt} = M_\alpha^{зовн}, \text{ або } I_\alpha\beta_\alpha = M_\alpha^{зовн}, \qquad (3.18)$$

де β_α – кутове прискорення обертального руху.

Найбільш загальне означення тензора інерції можна сформулювати в традиційному «шкільному форматі» так: **тензором інерції твердого тіла називається тензорна фізична величина, що характеризує інерційні властивості твердого тіла щодо обертання і визначається трьома скалярними величинами – головними моментами інерції твердого тіла, які є мірою інертності твердого тіла щодо обертання**

навколо трьох взаємно ортогональних головних осей інерції, причому і головні моменти інерції, і орієнтація відповідних головних осей інерції відносно твердого тіла залежать виключно від розподілу мас у твердому тілі.

Величини головних моментів інерції і напрямки головних осей інерції відносно твердого тіла можуть бути визначені експериментально або розрахунковим шляхом. У загальному випадку визначенню підлягають 6 скалярних величин: 3 головні моменти інерції і 3 кути між трьома головними осями інерції і трьома осями системи координат, зв'язаної з характерними напрямками в твердому тілі, що повністю узгоджується з існуванням 6 незалежних компонент тензора інерції.

Аналіз руху маятника Обербека

У роботі за допомогою маятника Обербека експериментально перевіряється рівняння моментів (3.18) при обертанні маятника відносно нерухомої горизонтальної осі:

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{н2} + \vec{M}_T, \qquad (3.19)$$

де I – момент інерції маятника відносно горизонтальної осі; $\vec{M}_{н2} = [\vec{r} \times \vec{F}_{н2}]$ – момент сили натягу $\vec{F}_{н2}$ з боку нитки, напрямленої вниз (вздовж $\vec{g}$); $\vec{M}_T$ – момент сили тертя $\vec{F}_T$, що діє на вісь маятника з боку підшипників. Момент сили $\vec{M}_{н2}$ може бути розрахований за відомим значенням радіуса шківа ($r = r_1$ або $r = r_2$) та сили натягу $\vec{F}_{н2}$: $\vec{M}_{н2} = [\vec{r} \times \vec{F}_{н2}]$.

Безпосереднє вимірювання модуля кутового прискорення маятника β здійснити складно, але його можна знайти через тангенціальну складову прискорення точки закріплення нитки на шківі за формулою $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \times \vec{r}]$, яка випливає з рівняння (3.10). За відсутності проковзування нерозтяжної нитки відносно шківа тангенціальна складова $\vec{a}_\tau$ дорівнює прискоренню $\vec{a}$ платформи (4), прикріпленої до нитки, на яку можна класти тягарці (5), $\vec{a}_\tau = \vec{a}$. Тому до рівнянь руху маятника необхідно також додати рівняння зв'язку:

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}]. \qquad (3.20)$$

Прискорення $\vec{a}$ платформи (4) визначається рівнянням її руху:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{н1}, \qquad (3.21)$$

де m – маса платформи (4) разом з тягарцями; $\vec{F}_{н1}$ – сила, що прикладена до платформи (4) з боку нитки.

Отже, рух маятника Обербека описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} I\vec{\beta} = [\vec{r} \times \vec{F}_{i2}] + \vec{M}_T; \\ m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{i1}; \\ \vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}]. \end{cases} \qquad (3.22)$$

Оскільки масою нитки можна знехтувати, то модулі сил натягу $\vec{F}_{н1}$ і $\vec{F}_{н2}$ можна вважати рівними: $F_{н1} = F_{н2} = F_н$. Тоді, проектуючи перше рівняння системи (3.21) на напрямок горизонтальної осі шківа, а друге і третє рівняння – на напрямок вектора прискорення вільного падіння $\vec{g}$, отримаємо:

$$\begin{cases} I\beta = F_i r + M_T; \\ ma = mg - F_i; \\ a = \beta r. \end{cases} \qquad (3.23)$$

де r – радіус шківа (рівний r_1 або r_2), m – маса платформи з тягарцями, a – модуль її прискорення. Розв'язуючи систему (3.23) відносно a, маємо:

$$mgr - M_т = a\left(mr + \frac{I}{r}\right),$$

звідки

$$a = \frac{mgr^2 / I - M_T r / I}{1 + mr^2 / I}. \qquad (3.24)$$

Отже, прискорення a платформи є сталим, оскільки всі величини в правій частині (3.24) є сталі. Відповідно і кутове прискорення маятника β є сталим. Таким чином, рух маятника Обербека є рівноприскореним за винятком малих порівняно з періодом коливань проміжків часу, коли прискорення змінює знак

на протилежний. Тому для знаходження лінійного прискорення a, що входить до (3.24), можна застосувати формулу $a = 2h/t^2$ для рівноприскореного руху. **Для цього необхідно виміряти час *t*, за який платформа (4) з тягарцям опускається на висоту *h*.**

Визначення моменту сили тертя та залежності кутового прискорення від моменту зовнішньої сили

До виразу (3.24) входить невідома величина – момент сили тертя $M_т$. На відміну від інших величин вона не може бути виміряна безпосередньо або розрахована теоретично. Ясно, що якщо знехтувати цією величиною (вважати, що $M_т$=0), то результати досліду будуть відрізнятися від залежності (3.24). Але величину $M_т$ можна оцінити експериментально, що потрібно зробити на початку роботи. Для цього за допомогою декількох тягарців, що змінюють силу натягу нитки T, необхідно визначити мінімальне значення маси m_0 платформи (4) з тягарцями, при якій маятник почне обертатися. Подальші виміри треба провести з тягарцями масою $m > m_0$.

Момент інерції, що входить в (3.24), враховуючи його адитивність і вважаючи розміри муфточок (2) малими порівняно з їх відстанями R до осі обертання (див. рис. 3.1), може бути записаний у вигляді:

$$I = I_0 + 4m_M R^2 \qquad (3.25)$$

де m_M – маси муфточок; $I_0 = I$ при R=0, тобто дорівнює моменту інерції маятника Обербека без муфточок (2) на спицях.

В умовах досліду вираз mr^2/I приблизно на два порядки менший за одиницю. Тому нехтуючи ним у знаменнику виразу (3.24) отримуємо формулу, власне експериментальна перевірка яка якої здійснюється в роботі :

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{mgr - M_т}{I}. \qquad (3.26)$$

Визначення залежності моменту інерції *I* від відстані тягарця до осі обертання

Нехтуючи у виразі (3.26) малою величиною $M_т$ (порівняно з моментом mgr), отримаємо:

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{1}{I}\left(mgr - M_т\right) = \frac{mgr - M_т}{I_0 + 4m_т R^2} \approx \frac{mgr}{I_0 + 4m_т R^2}. \qquad (3.27)$$

Звідси:

$$\frac{r}{a} = \frac{I_0 + 4m_т R^2}{mgr}, \qquad \frac{g}{a} = \frac{I_0}{mr^2} + \frac{4m_т}{m}\cdot\frac{R^2}{r^2}. \qquad (3.28)$$

ВИМІРЮВАННЯ

У роботі необхідно експериментально перевірити основне рівняння динаміки обертального руху маятника Обербека (рівняння моментів). Перевірка здійснюється двома методами. **Перший** – експериментально досліджується залежність кутового момент інерції I залишається сталим. Якщо по осі ординат відкласти кутове прискорення β, а по осі абсцис – mgr, то згідно з (3.26) експериментальні точки повинні лягти на пряму. З (3.26) видно, що нахил цієї прямої дорівнює $1/I$, а точка перетину з віссю абсцис дає значення $M_т$. Якщо отримана експериментальна залежність $\beta(mgr)$ є лінійною, то це підтверджує застосовність рівняння моментів для опису обертального руху маятника Обербека. Д**ругим метод** полягає в експериментальному дослідженні залежності відношення g/a від $(R/r)^2$ при сталому моменті сили mgr. Для цього потрібно при вибраній сталій масі m платформи (4) з тягарцями та певному радіусі r шківа визначити прискорення a_i при різних відстанях R_i муфточок m_M від осі обертання маятника і нанести ці пари величин на графік $y(x)$, де $x=(R/r)^2$, $y=g/a$. Якщо експериментальні точки в межах похибок вимірювань лягають на пряму, то цей факт і є підтвердженням застосовності рівняння моментів для опису обертального руху маятника Обербека.

Слід зауважити, що при виведенні формули (3.28) ми знехтували моментом сил тертя, тобто вважали $M_т << mgr$. Як було

зауважено вище, значення $M_т$ можна визначити із графіка залежності $\beta(mgr)$ при R=const. Знання значення $M_т$ дозволяє обрати масу m платформи (4) з тягарцями так, щоб нерівність $mgr >> M_т$ упевнено виконувалась.

Провести такі вимірювання.

1. Змінюючи кількість тягарців на платформі, наближено оцінити мінімальну масу m_0 платформи (4) з тягарцями, при якій маятник починає обертатися.
2. Оцінити момент сил тертя зі співвідношення: $M_т \approx m_0 gr$, де r – радіус шківа, на якому підвішена платформа з (4) з тягарцями масою m_0.
3. Виміряти висоту h між осями верхньої та нижньої оптопар (світлодіод-фоторезистор).
4. Увімкнути тумблер «Сеть».
5. Зафіксувати на певних однакових відстанях R від осі маятника муфточки m_M на спицях.
6. При ненатиснутій кнопці «Пуск» покласти 1-й тягарець (а надалі 2-й, 3-й, … і т.д.) на платформу (4), притримуючи систему зі спицями.
7. Натиснувши кнопку «Пуск», звільнити систему.
8. Виміряти час падіння t платформи (4) з висоти h.
9. Вимірювання провести для двох шківів з радіусами r_1 і r_2 та 5 тягарців на платформі. Кожен дослід повторити не менше 5 разів.
10. Обчислити $a = 2h/t^2$, а потім β. Побудувати графік залежності $\beta = \beta(mgr)$.
11. Зафіксувати муфточки m_M на спицях на певних однакових відстанях R від осі маятника.
12. При ненатиснутій кнопці «Пуск» покласти тягарці певної маси $m>>m_0$ на платформу, притримуючи систему зі спицями.
13. Натиснувши кнопку «Пуск», звільнити систему.
14. Виміряти час падіння t платформи (4) з висоти h.

15. Вимірювання провести для двох шківів з радіусами r_1 і r_2 та 5 однакових відстаней R муфточки m_M від осі маятника на спицях. Кожен дослід повторити не менше 5 разів.
16. Обчислити $a = 2h/t^2$, а потім g/a.
17. Побудувати графік залежності g/a від $(R/r)^2$.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Виміряти залежність кутового прискорення β маятника від моменту прикладеної сили mgr. При цих вимірюваннях момент інерції маятника повинен бути незмінним: I=const.
2. Одержані експериментальні точки відкласти на координатній площині $x=mgr$, $y=\beta$, тим самим побудувавши експериментальну залежність $\beta=\beta(mgr)$.
3. За методом найменших квадратів апроксимувати отриману експериментальну залежність $\beta=\beta(mgr)$ лінійною функцією. На основі результатів апроксимації зробити висновок про коректність використання рівняння моментів для опису руху маятника Обербека. Визначити сумарний момент інерції маятника з муфточками на спицях I.
4. Зі значення моменту сили mgr, що відповідає точці перетину прямої $\beta=\beta(mgr)$ з віссю абсцис, знайти мінімальну масу m_0 платформи (4) з тягарцями, при якій маятник починає обертатись.
5. Виміряти залежність g/a від $(R/r)^2$. При цих вимірюваннях маса m платформи (4) з тягарцями має бути сталою. Виміри виконати для двох шківів з радіусами r_1 і r_2.
6. Одержані експериментальні точки відкласти на координатній площині $x=(R/r)^2$, $y=g/a$, тим самим побудувавши експериментальну залежність g/a від $(R/r)^2$.
7. За методом найменших квадратів апроксимувати отриману експериментальну залежність g/a від $(R/r)^2$ лінійною функцією. На основі результатів апроксимації зробити висновок про коректність використання рівняння моментів для опису

руху маятника Обербека. Визначити момент інерції ненавантаженого маятника (без муфточок на спицях) I_0.

Теоретичні завдання

1. Дати визначення кутової швидкості та кутового прискорення твердого тіла.
2. Як вони пов'язані з відповідними лінійними величинами?
3. Дати означення моменту імпульсу та моменту сили.
4. Вивести та сформулювати умови зміни та збереження моменту імпульсу частинки та системи частинок.
5. Вивести співвідношення, що зв'язує компоненти вектора моменту імпульсу абсолютно твердого тіла при його обертальному русі з компонентами вектора його кутової швидкості.
6. Що собою являє тензор інерції твердого тіла та який його фізичний зміст?
7. Кількісною мірою якої властивості твердого тіла є момент інерції?
8. Записати та сформулювати основний закон динаміки обертального руху твердого тіла (рівняння моментів).
9. Чому експериментальну установку, що використовується в роботі, називають маятником?
10. Чи є рух маятника Обербека періодичним? Якщо є, то з яким періодом? Чи є цей рух гармонічним?
11. Описати перетворення потенціальної енергії маятника Обербека в кінетичну і навпаки.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
2. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Т.1. Механика» // Москва, Наука, 1989.
3. А. Н. Матвеев, «Механика и теория относительности» // Москва, Высшая школа, 1986.

РОБОТА № 4

ВИВЧЕННЯ ЕЛІПСОЇДА ІНЕРЦІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ

Мета роботи

Перевірити рівняння еліпсоїда інерції твердих тіл за допомогою методу крутильних коливань.

Теоретичні відомості

Розглянемо тверде тіло, закріплене з можливістю обертання навколо нерухомого центра мас. Уведемо декартову систему координат із початком O в центрі мас тіла $\vec{r}_i$ (рис. 4.1). Якщо уявно розбити тверде тіло на сукупність малих елементів, які можна вважати матеріальними точками, з масами Δm_i та радіус-векторами $\vec{r}_i$ (рис. 4.1), то момент імпульсу цього тіла можна записати як суму моментів імпульсу всіх його елементів

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \times (\Delta m_i \vec{\upsilon}_i)] = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i]. \qquad (4.1)$$

При обертальному русі лінійна та кутова швидкості матеріальної точки зв'язані співвідношенням (3.9) $\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$, звідки, використовуючи відому формулу $[\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, отримаємо:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]] = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]. \qquad (4.2)$$

Якщо спроектувати вектор $\vec{L}$ у виразі (4.2) на координатні осі, то отримаємо такі проекції:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}, \qquad (4.3)$$

де впорядкований набір з 9 величин $I_{\alpha\beta}$ (індекси α, β можуть набувати значень x, y, z), що встановлюють однозначний лінійний

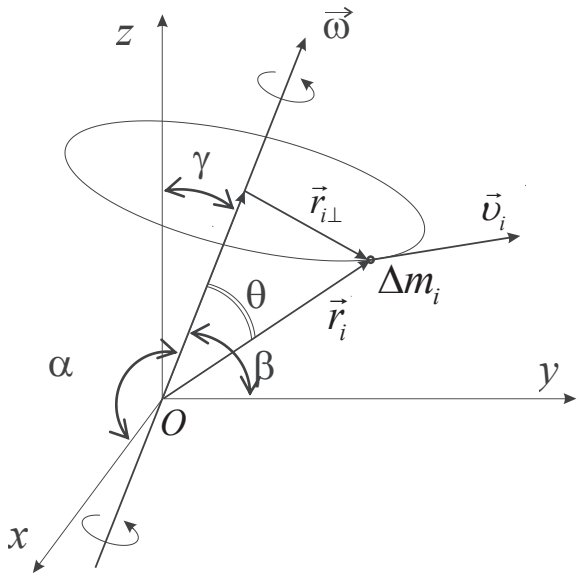


Рис. 4.1. До обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

зв'язок між трьома компонентами вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ і трьома компонентами вектора моменту імпульсу твердого тіла, визначається виразами

$$I_{xx} = \sum_i \Delta m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) = \int_V \rho\left(y^2 + z^2\right) dV \ ;$$

$$I_{yy} = \sum_i \Delta m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) = \int_V \rho\left(x^2 + z^2\right) dV \ ;$$

$$I_{zz} = \sum_i \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \int_V \rho\left(x^2 + y^2\right) dV \ ;$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i \Delta m_i x_i y_i = -\int_V \rho xy \, dV \ ; \qquad (4.4)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i \Delta m_i x_i z_i = -\int_V \rho xz \, dV \ ;$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i \Delta m_i y_i z_i = -\int_V \rho yz \, dV \ .$$

Якщо маса в тілі розподілена неперервно з об'ємною густиною $\rho = \rho(x, y, z)$, то від сумування можна перейти до інтегрування по всьому об'єму V твердого тіла. Співвідношення (4.4) можна узагальнено записати у вигляді:

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \rho(r^2 \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta) dV \ , \qquad (4.4a)$$

де $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha=\beta; \\ 0, & \text{якщо } \alpha \neq \beta \end{cases}$ – символ Кронекера, а $\alpha, \beta = x, y, z$.

Упорядкований набір із 9 величин $I_{\alpha\beta}$, що залежать від розподілу мас в абсолютно твердому тілі, визначає в обраній системі координат так званий ***тензор інерції*** абсолютно твердого тіла. Величини $I_{\alpha\beta}$ називають ***компонентами тензора інерції.*** Їх зручно записувати у вигляді матриці 3×3:

$$\left[I_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} . \qquad (4.5)$$

Величини I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, які є діагональними елементами тензора, називаються ***осьовими моментами інерції***. Величини I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zz}, які є недіагональними елементами, називаються ***неосьовими*** або ***відцентровими моментами інерції***. З (4.4) видно, що $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$, тобто матриця компонент тензора інерції симетрична, а таку матрицю можна звести до діагонального вигляду шляхом відповідного вибору системи координат, при якому всі неосьові моменти інерції будуть рівні нулю:

$$\left[I_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} . \qquad (4.6)$$

Система координат, у якій матриця компонент симетричного тензора 2-го рангу набуває діагонального вигляду, називається ***головною*** або ***власною*** системою координат цього тензора. Осьові

моменти інерції в такій системі координат $I_1 \equiv I_{xx}$, $I_2 \equiv I_{yy}$ та $I_3 \equiv I_{zz}$ називаються ***головними моментами інерції*** абсолютно твердого тіла. Вони визначають інерційні властивості (є кількісними мірами інертності) абсолютно твердого тіла щодо обертання навколо осей, що співпадають з головними осями тензора інерції. Дійсно, в головній системі координат тензора інерції система рівнянь (4.3) набуває вигляду:

$$L_\alpha = I_\alpha \omega_\alpha . \qquad (4.7)$$

Тоді **основне рівняння динаміки обертального руху (3.7) (рівняння моментів)**, записане в проекціях на осі головної системи координат, матиме вигляд:

$$I_\alpha \frac{d\omega_\alpha}{dt} = M_\alpha^{зовн}, \text{ або } I_\alpha \beta_\alpha = M_\alpha^{зовн}. \qquad (4.8)$$

У довільній системі координат зв'язок між 3 компонентами вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ твердого тіла і 3 компонентами його вектора власного моменту імпульсу $\tilde{\vec{L}}$ (4.3) можна записати у компактно як

$$\tilde{L}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}\omega_\beta , \qquad (4.9)$$

або у більш компактному і загальному, так званому ***безкоординатному*** вигляді як

$$\tilde{\vec{L}} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}, \qquad (4.10)$$

де символом $\hat{I}$ позначено ***тензор інерції*** твердого тіла.

Означення тензора інерції можна сформулювати так: **тензором інерції твердого тіла називається тензорна фізична величина, що характеризує інерційні властивості твердого тіла щодо обертання і визначається трьома скалярними величинами – головними моментами інерції твердого тіла, які є мірою інертності твердого тіла щодо обертання навколо трьох взаємно ортогональних головних осей інерції, причому і головні моменти інерції і орієнтація відповідних головних осей інерції відносно твердого тіла залежать виключно від розподілу мас у твердому тілі.**

Підкреслимо, що будь-які фізичні величини – тензорні, векторні чи скалярні – не залежать від вибору системи координат. У реальному світі взаємне розташування матеріальних об'єктів і їх відносний рух визначається виключно відстанями і кутами між напрямками, тобто чисто геометричними поняттями. Тому тензори і вектори часто називають ***геометричними об'єктами***, тобто такими, що не залежать від вибору системи координат, уведення яких не є обов'язковим, але буває дуже зручним, оскільки дозволяє замінити операції з геометричними об'єктами арифметичними чи алгебраїчними операціями.

Величини головних моментів інерції і напрямки головних осей інерції відносно твердого тіла можуть бути визначені експериментально або розрахунковим шляхом. У загальному випадку визначенню підлягають 6 скалярних величин: 3 головні моменти інерції і 3 кути між трьома головними осями інерції і трьома осями системи координат, зв'язаної з характерними напрямками в твердому тілі, що повністю узгоджується з існуванням 6 незалежних компонент тензора інерції.

Якщо тверде тіло обертається навколо довільної нерухомої осі, то радіус-вектор $\vec{r}_i$ зручно подати як $\vec{r}_i = \vec{r}_{i\|} + \vec{r}_{i\perp}$, де $\vec{r}_{i\|} \| \vec{\omega}$, а $\vec{r}_{i\perp} \perp \vec{\omega}$. Тоді $\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] = [\vec{\omega} \times (\vec{r}_{i\|} + \vec{r}_{i\perp})] = [\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}]$. Якщо вісь проходить через центр мас, то відповідний момент імпульсу буде рівний:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \left[\vec{r}_{i\perp} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}]\right] = \sum_i \Delta m_i \left(\vec{\omega}(\vec{r}_{i\perp} \cdot \vec{r}_{i\perp}) - \vec{r}_{i\perp} \underbrace{(\vec{r}_{i\perp} \cdot \vec{\omega})}_{=0} \right) =$$

$$= \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega} . \qquad (4.11)$$

Таким чином, при обертанні навколо нерухомої осі вектори $\vec{L}$ і $\vec{\omega}$ зв'язані через скалярну величину I, яка називається ***моментом інерції тіла відносно осі обертання***. При неперервному розподілі маси в тілі момент інерції відносно осі може бути знайдено шляхом інтегрування по об'єму тіла:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2 = \int_V \rho r^2 dV . \qquad (4.12)$$

Щоб виразити момент інерції I через координати i-го елемента, запишемо $r_{i\perp}^2 = r_i^2 - r_{i\|}^2$. Розглянемо $r_{i\|}$. $r_{i\|}$ – це проекція $\vec{r}$ на напрямок $\vec{\omega}$:

$$r_{i\|} = r_i \cos\theta, \tag{4.13}$$

де θ – кут між $\vec{r}_{i\|}$ та $\vec{r}_i$. Порівнюючи скалярний добуток $\vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = r_i \omega \cos\theta_i$ та вираз (4.13) для $r_{i\|}$, можна записати:

$$r_{i\|} = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}}{\omega} = x_i \frac{\omega_x}{\omega} + y_i \frac{\omega_y}{\omega} + z_i \frac{\omega_z}{\omega} = x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma, \tag{4.14}$$

де $\cos\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}$, $\cos\beta = \frac{\omega_y}{\omega}$, $\cos\gamma = \frac{\omega_z}{\omega}$ – направляючі косинуси вектора $\vec{\omega}$. Оскільки $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$, то виконується рівність

$$\frac{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}{\omega^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4.15}$$

У результаті з (4.12)отримаємо:

$$I = \sum_i \Delta m_i \left(r_i^2 - r_{i\|}^2\right) = \sum_i \Delta m_i \Big[\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) - \left(x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma\right)^2 \Big] \tag{4.16}$$

Групуючи у виразі (4.16) доданки за степенями косинусів, отримуємо:

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma. \tag{4.17}$$

Якщо направити осі координат вздовж головних осей твердого тіла, то тензор інерції набуває діагонального вигляду. Тоді вираз для моменту інерції матиме вигляд:

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma. \tag{4.18}$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію співвідношення (4.18). Введемо декартову систему координат і для кожного набору кутів α, β, γ відкладемо по осях OX, OY,OZ величини:

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{I(\alpha,\beta,\gamma)}},\ y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{I(\alpha,\beta,\gamma)}},\ z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{I(\alpha,\beta,\gamma)}}. \tag{4.19}$$

Множина точок із координатами x, y, z визначають деяку поверхню. Щоб визначити рівняння цієї поверхні, виразимо направляючі косинуси через x, y, z: $\cos\alpha = x\sqrt{I}$, $\cos\beta = y\sqrt{I}$, $\cos\gamma = z\sqrt{I}$ і підставимо у вираз (4.18):

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1, \tag{4.20}$$

де $I_1 \equiv I_{xx}$, $I_2 \equiv I_{yy}$ і $I_3 \equiv I_{zz}$ – головні моменти інерції твердого тіла. З вигляду рівняння (4.20) видно, що ця поверхня є еліпсоїдом. Цей еліпсоїд називається ***еліпсоїдом інерції***. За допомогою рівняння еліпсоїда інерції можна легко визначити момент інерції тіла відносно довільної осі обертання, якщо задані її направляючі косинуси. Проведемо з центра еліпсоїда вектор із направляючими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Довжина цього вектора до перетину з поверхнею еліпсоїда буде рівною $\frac{1}{\sqrt{I(\alpha,\beta,\gamma)}}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{I} = \frac{1}{I}. \tag{4.21}$$

Опис експериментального методу

У цій лабораторній роботі перевіряється рівняння еліпсоїда інерції (4.18)

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma,$$

де I_1, I_2, I_3 – головні моменти інерції, а α, β, γ – кути між віссю обертання та осями координат OX, OY, OZ, які співпадають з головними осями тіла, для однорідних і симетричних твердих тіл (куб та прямокутні паралелепіпеди двох видів). Головні осі таких тіл одночасно є і осями симетрії цих тіл. Вони проходять через геометричний центр тіла перпендикулярно до його граней. Для вимірювання моментів інерції твердого тіла відносно осі, напрям якої задається кутами α, β, γ, застосовується метод крутильних коливань.

У цьому методі досліджуване тверде тіло жорстко закріплюється в рамці крутильного маятника, яка підвішена на пружній, вертикально натягнутій дротині. Якщо вивести маятник зі

стану рівноваги, то він здійснюватиме коливання. Для того, щоб знайти період його коливань використаємо рівняння моментів:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\ , \qquad (4.22)$$

де $\vec{L}$ – момент імпульсу, $\vec{M}$ – момент пружних сил. Момент імпульсу можна виразити як $\vec{L} = I_m\vec{\omega} = I_m\dot{\vec{\varphi}}$, а момент сил $\vec{M} = D\vec{\varphi}$. Отже, якщо спроектувати векторне рівняння (4.22) на вісь обертання, то рівняння руху матиме вигляд рівняння гармонічного осцилятора:

$$I_m\ddot{\varphi} = -D\varphi \ \Rightarrow\ \ddot{\varphi} + \frac{D}{I_m}\varphi = 0\ ,$$

звідки частота коливань $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{I_m}}$, а отже їх період:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_m}{D}}\ , \qquad (4.23)$$

де I_m – момент інерції маятника відносно осі обертання, φ – кут відхилення рамки від положення рівноваги, D – модуль кручення (дивись роботу №11 «Визначення модуля пружності за розтягом дротини на приладі Лермонтова»). Момент інерції маятника рівний сумі моменту інерції рамки I_0 та моменту інерції I досліджуваного тіла: $I_m = I_0 + I$. Період коливань T_0 крутильного маятника з вільною рамкою (без тіла) і, відповідно, період коливань рамки з тілом T:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}\ , \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I}{D}}\ . \qquad (4.24)$$

Із цих двох рівнянь можна виключити невідому величину – модуль кручення D і виразити момент інерції I досліджуваного тіла через момент інерції I_0 вільної рамки:

$$I = I_0\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right). \qquad (4.25)$$

Вимірюючи періоди коливань T_0 та T, за допомогою виразу (4.25) можна розрахувати момент інерції тіла I в одиницях моменту інерції вільної рамки I_0. Період коливань T, як і момент інерції тіла I залежить від орієнтації тіла по відношенню до осі маятника. В лабораторній установці вісь маятника (вона є одночасно і віссю обертання тіла) направлена вертикально і не змінюється. Тому для зміни момента інерції I, тіло закріплюють у різних положеннях відносно осі обертання (рис.4.2). Направляючи осі координат *OX*, *OY*, *OZ* вздовж головних осей тіла, ми обираємо систему координат, яка жорстко зв'язана з тілом. Повертаючи тіло, ми змінюємо орієнтацію головних осей тіла відносно осі обертання.

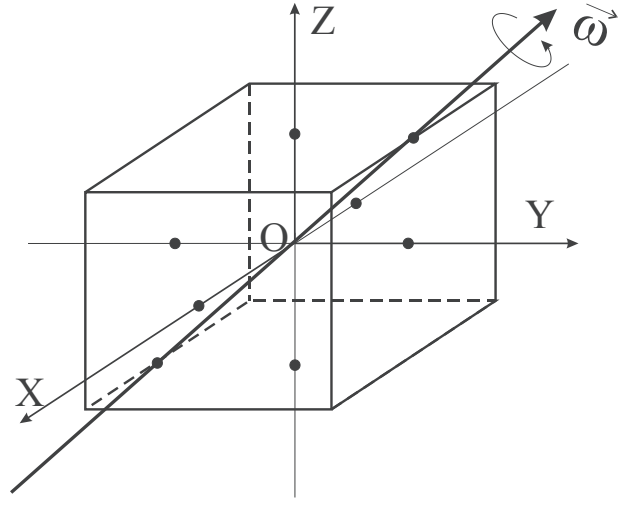


Рис. 4.2. Ілюстрація закріплення тіла відносно довільної осі обертання.

Закріпимо тіло в рамці таким чином, щоб вісь обертання співпадала з однією з головних осей *OX*, *OY* або *OZ*. Тоді з виразу (4.25) отримаємо:

$$I_{xx} = I_0\left(\frac{T_x^2}{T_0^2} - 1\right), \quad I_{yy} = I_0\left(\frac{T_y^2}{T_0^2} - 1\right), \quad I_{zz} = I_0\left(\frac{T_z^2}{T_0^2} - 1\right), \quad (4.26)$$

де T_x, T_y, T_z – періоди коливань маятника відносно відповідної головної осі *OX*, *OY* або *OZ*. Якщо підставити вирази (4.25) та (4.26) в (4.18) отримаємо:

$$T^2(\alpha,\beta,\gamma) = T_x^2\cos^2\alpha + T_y^2\cos^2\beta + T_z^2\cos^2\gamma\,. \quad (4.27)$$

Таким чином, існує простий зв'язок між періодами крутильних коливань T_x, T_y, T_z відносно осей симетрії тіла *OX*, *OY*, *OZ* та періодом коливань цього тіла відносно осі, напрям якої визначається кутами α, β, γ. Вирази (4.23) та (4.27) є правильними за умови, що згасання коливань крутильного маятника є малим. Практично достатньо, щоб кількість коливань *N,* за які амплітуда зменшується в 3 рази, задовольняла умову $N \geq 10$. Якщо ця умова виконується, то перевірка рівняння (4.18) зводиться до перевірки рівняння (4.27). Це зручно тим, що всі величини, які входять у вираз (4.27), можуть бути отримані за допомогою прямих вимірів.

Співвідношення (4.27) будемо перевіряти для простого випадку, коли досліджуване тіло має форму прямокутного паралелепіпеда з довжиною ребер *a, b, c.* Для дослідження візьмемо три випадки: куб (*a=b=c)*, симетричний паралелепіпед (*a=b≠c)*, несиметричний паралелепіпед (*a≠b≠c)*.

Отримаємо вирази для направляючих косинусів для різних напрямів осі обертання.

***Головна діагональ (вісь AB – рис. 4.3*)**. Направляючі косинуси для неї визначатимуться як

$$\cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\,,\ \cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\,,$$

$$\cos^2\gamma = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\,. \quad (4.28)$$

Вісь, що проходить через середини протилежних ребер, паралельних осі OX (вісь EF – рис. 4.3). У цьому випадку направляючі косинуси визначаються як

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0\,,\ \cos^2\beta = \frac{b^2}{b^2+c^2}\,,\ \cos^2\gamma = \frac{c^2}{b^2+c^2}\,. \quad (4.29)$$

Вісь, що проходить через середини протилежних ребер, паралельних осі OY (вісь MN – рис. 4.3). У цьому випадку направляючі косинуси визначаються як

$$\cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2+c^2}\,,\ \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\beta = 0\,,\ \cos^2\gamma = \frac{c^2}{a^2+c^2}\,. \quad (4.30)$$

Вісь, що проходить через середини протилежних ребер, паралельних осі OZ (вісь PQ – рис. 4.3). У цьому випадку направляючі косинуси визначаються як

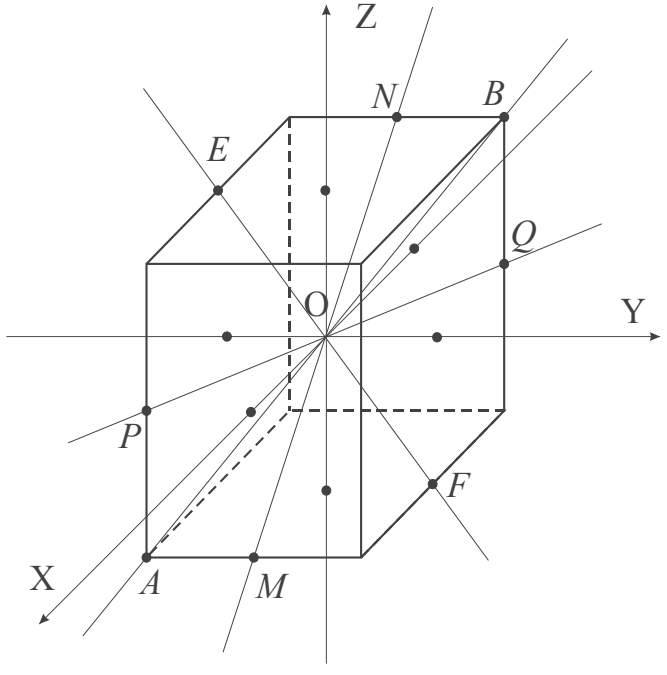


Рис. 4.3. Напрям досліджуваних осей обертання.

$$\cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2+b^2}\,,\ \cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2+b^2}\,,\ \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma = 0\,. \quad (4.31)$$

Рівняння (4.26) та (4.27) пов'язують моменти інерції досліджуваного тіла з моментом інерції рамки крутильного маятника I_0. Якщо визначити момент інерції рамки то можна розрахувати момент інерції для будь-якого тіла, яке вивчається в роботі. Для визначення моменту інерції рамки можна використати еталонне тіло, момент інерції якого відомий, тоді з виразу (4.26) отримаємо:

$$I_0 = I_{et}\frac{T_0^2}{T_{et}^2 - T_0^2}, \qquad (4.32)$$

де T_{et} – період коливань рамки з закріпленим в ній еталонним тілом, I_{et} – момент інерції еталонного тіла. В якості еталонного тіла в роботі використовується однорідний куб, його момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас, можна вирахувати за формулою:

$$I_{et} = \frac{1}{6}ma^2, \qquad (4.33)$$

де m – маса куба, a – його сторона. Обчисливши I_{et} за формулою (4.33) і вимірявши періоди коливань T_0 та T_{et}, можна визначити I_0 за допомогою рівняння (4.32).

ВИМІРЮВАННЯ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Переконайтесь, що коливання крутильного маятника є слабко згасаючими. Для цього виведіть маятник із положення рівноваги і визначте кількість коливань N, за які амплітуда коливань зменшиться в 3 рази. Вимірювання проведіть для вільної рамки та для рамки з закріпленим тілом. Якщо $N>10$, то можна використовувати формулу (4.24).
2. Виміряйте період коливань, закріплюючи в рамці в різних положеннях зразок, який має форму куба. Для кожної осі виміри виконайте не менше 5 разів. Періоди коливань $T_1, T_2, \ldots, T_5$ виміряйте для таких положень куба:
   а) вісь обертання проходить через центри двох протилежних граней (головні осі *OX*, *OY*, *OZ*);
   б) вісь обертання співпадає з діагоналлю куба;

   в) вісь обертання проходить через середини протилежних ребер.
   Результати вимірювань занесіть у таблицю 4.1.

Табл. 4.1

	T_1	T_2	...	T_5	$\overline{T}$	ΔT	$\varepsilon_T = \left(\Delta T/\overline{T}\right)\cdot 100\%$
Головні осі							
Діагональ							
Вісь через середини ребер							

3. Виміряйте довжину ребра куба $a = b = c$. За формулами (4.28) і (4.29) розрахуйте направляючі косинуси для відповідних осей обертання.
4. Перевірте, чи виконується співвідношення (4.27) для осей, згаданих в (б) і (в) пункту 2. Для цього знайдіть відносне відхилення експериментального значення T^2 від теоретичного значення, розрахованого за формулою (4.27).
5. Виміряйте період коливань, закріплюючи в рамці в різних положеннях зразок, який має форму симетричного паралелепіпеда. Для кожної осі виміри виконайте не менше 5 разів. Періоди коливань $T_1, T_2, \ldots, T_5$ виміряйте для таких положень куба:
   а) вісь обертання проходить через центри двох протилежних граней (головні осі *OX*, *OY*, *OZ*);
   б) вісь обертання співпадає з діагоналлю куба;
   в) вісь обертання проходить через середини протилежних ребер. Таких нееквівалентних осей буде 2. Результати вимірювань занесіть у таблицю 4.2.

Табл. 4.2

	T_1	T_2	...	T_5	$\overline{T}$	ΔT	$\varepsilon_T = \left(\Delta T / \overline{T}\right) \cdot 100\%$
Головні осі							
Діагональ							
Вісь 1 через середини ребер							
Вісь 2 через середини ребер							

6. Виміряйте довжину ребер симетричного паралелепіпеда a і $b = c$. За формулами (4.28) – (4.30) розрахуйте направляючі косинуси для відповідних осей обертання.
7. Перевірте, чи виконується співвідношення (4.27) для осей, згаданих в (б) і (в) пункту 5. Для цього знайдіть відносне відхилення експериментального значення T^2 від теоретичного значення, розрахованого за формулою (4.27).
8. Виміряйте період коливань, закріплюючи в рамці в різних положеннях зразок, який має форму несиметричного паралелепіпеда. Для кожної осі виміри виконайте не менше 5 разів. Періоди коливань $T_1, T_2, \ldots, T_5$ виміряйте для таких положень куба:
   а) вісь обертання проходить через центри двох протилежних граней (головні осі *OX*, *OY*, *OZ*);
   б) вісь обертання співпадає з діагоналлю куба;
   в) вісь обертання проходить через середини протилежних ребер.
   Таких нееквівалентних осей буде 3. Результати вимірювань занесіть у таблицю 4.3.
9. Виміряйте довжину ребер несиметричного паралелепіпеда a, b і c. За формулами (4.28) – (4.31) розрахуйте направляючі косинуси для відповідних осей обертання.
10. Перевірте, чи виконується співвідношення (4.27) для осей, згаданих в (б) і (в) пункту 8. Для цього знайдіть відносне

відхилення експериментального значення T^2 від теоретичного значення, розрахованого за формулою (4.27).

Табл. 4.3

	T_1	T_2	...	T_5	$\overline{T}$	ΔT	$\varepsilon_T = \left(\Delta T / \overline{T}\right) \cdot 100\%$
Головні осі							
Діагональ							
Вісь 1 через середини ребер							
Вісь 2 через середини ребер							
Вісь 3 через середини ребер							

11. Знайдіть, скориставшись формулами (4.32) та (4.33), момент інерції рамки. Потім за виміряними значеннями періодів коливань T_x, T_y, T_z відносно відповідних головних осей несиметричного паралелепіпеда обчисліть його головні моменти інерції. Результати занесіть в таблицю 4.4. Оцініть похибку вимірювання величин I_1, I_2, I_3.

Табл. 4.4

m	a	I_{et}	T_{et}	T_0	$I_0 \pm \Delta I_0$	$I_1 \pm \Delta I_1$	$I_2 \pm \Delta I_2$	$I_3 \pm \Delta I_3$

12. Використовуючи формули для головних моментів інерції несиметричного паралелепіпеда

$$I_1 = \frac{1}{12} m\left(b^2 + c^2\right),\ I_2 = \frac{1}{12} m\left(a^2 + c^2\right),\ I_3 = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right), \quad (4.34)$$

і вимірявши його геометричні розміри, розрахувати головні моменти інерції і порівняти отримані значення з величинами з таблиці 4.4. Обчисліть відносне відхилення експериментальних значень від теоретично розрахованих. Результати занести в таблицю 4.5.

Табл. 4.5

	I_1	I_2	I_3
Експериментально визначені			
Теоретично розраховані			
Відносне відхилення			

Теоретичні завдання

1. Виведіть формулу (4.24) періоду крутильних коливань.
2. Дайте означення тензора інерції. За яких умов він набуває діагонального вигляду?
3. Дайте означення момента інерції відносно осі обертання.
4. Отримайте формулу, що визначає зв'язок моменту імпульсу твердого тіла та кутової швидкості його обертання.
5. Поясніть, що являє собою еліпсоїд інерції. Як пов'язані між собою момент інерції тіла відносно довільної осі і головні півосі еліпсоїда інерції.
6. Поясніть, чому перевірка співвідношення (4.18), яке описує еліпсоїд інерції, зводиться до вимірювання періодів коливань крутильного маятника.
7. Користуючись співвідношенням (4.4а) виведіть формулу (4.33) для головних моментів інерції куба $I_{et} = \frac{1}{6} ma^2$.
8. Користуючись співвідношенням (4.4а) виведіть формули (4.34) для головних моментів інерції несиметричного паралелепіпеда.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
2. С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо, «Практикум по физике. Механика» // Москва, Высшая школа, 1990.
3. «Общий физический практикум. Механика», под редакцией А. Н. Матвеева, Д. Ф. Киселева // Москва, МГУ, 1991.
4. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Т. I. Механика» // Москва, Физматлит, 2006.

РОБОТА № 5

ГІРОСКОП

Мета роботи

1. Вивчення закономірностей руху гіроскопа.
2. Експериментальне визначення моменту інерції гіроскопа.

Опис експериментальної установки

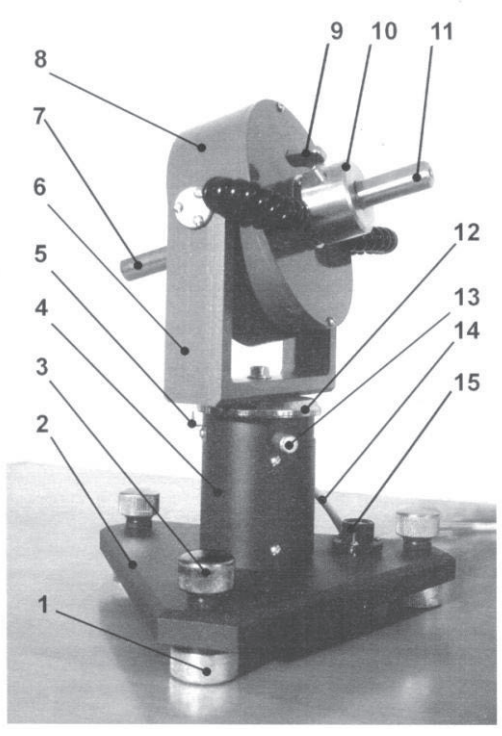


Рис. 5.1. Експериментальна установка – гіроскоп.

Експериментальна установка для вивчення руху гіроскопа зображена на рис 5.1. Гіроскоп ФМ18М складається з основи (2),

корпусу (4) з вузлом підшипників, вертикальним валом з вузлом фіксації (13) і колектором. На валу встановлені лімб (12) та вилка (6). На вилці (6) встановлена гіроскопічна система (8). Основа (2) має три регуляторні основи з фіксуючими гвинтами (3) та рівнем (15). Лімб (12) та вказівник (5), встановлений на корпусі (4), необхідні для визначення кута обертання гіроскопічної системи під час прецесії. Гіроскопічна система (8) складається з електродвигуна-маховика з вбудованим датчиком швидкості обертання, стержнів (7) та (11). На стержні в процесі роботи встановлюється тягарець (10) з фіксуючим гвинтом (9). За допомогою тягарця (10) створюється момент сили.

Гіроскоп у складі установки працює разом з електронним блоком, до якого підключається роз'єм (14). Табло електронного блоку показує значення частоти обертання гіроскопа (на табло позначається літерою "*f*") у Гц та кутової швидкості прецесії гіроскопа Ω (на табло позначається літерою "*w*") у рад/с.

Для підготовки гіроскопа до роботи необхідно виконати наступні дії.

- Зафіксувати положення вала гіроскопа за допомогою гвинта (13).
- За рівнем (15) перевірити горизонтальність положення основи (2) гіроскопа.
- У разі необхідності гвинтами опори (1) (попередньо відпустивши фіксуючі гвинти (3)) встановити горизонтальність основи (2). Зафіксувати це положення гвинтами (3).
- Увімкнути електронний блок в електричну мережу 220 В, 50 Гц.
- Відпустити фіксуючий гвинт (13)
- Встановити горизонтально осі (7) та (11) гіроскопічного вузла (8).
- На передній панелі електронного блоку натиснути кнопку «ПУСК/СТОП СБРОС» та утримати її протягом 1–2 с до появи на електронному табло напису «I».
- Кнопками регулювання швидкості обертання маховика гіроскопа «частота +» та «частота –» встановити кутову швидкість обертання в межах 40 ... 60 (Гц).

Для вивчення прецесії гіроскопа тягарець закріплюється на осях (7) або (11) гіроскопа. Для вимірювання кутової швидкості прецесії при певному положенні тягарця необхідно виконати такі дії: коротко натиснути кнопку «ПУСК/СТОП СБРОС» на електронному табло і записати показання значення кутової швидкості прецесії на табло. Після цього необхідно зафіксувати положення вала гвинтом (13).

УВАГА!

Забороняється встановлювати частоту обертання маховика гіроскопа понад 100 Гц.

Час неперервної роботи двигуна гіроскопа 30 хв. Перерва 15 хв.

По закінченню вимірів вимкнути двигун маховика гіроскопа, для чого натиснути кнопку «ПУСК/СТОП СБРОС» та утримувати її протягом 1 – 2 с до появи на електронному табло напису «0». Вимкнути електронний блок кнопкою «СЕТЬ» на задній панелі.

Теоретичні відомості

Гіроскоп – це симетричне тіло (з осьовою симетрією), що швидко обертається навколо своєї осі симетрії, орієнтація якої в просторі може змінюватися. Прикладами гіроскопів можуть слугувати як дитяча дзиґа, так і планета Земля.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла. Рівняння моментів

Моментом імпульсу матеріальної точки називають векторний добуток радіус-вектора, що визначає положення цього тіла відносно деякої точки, на його імпульс.

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = \left[\vec{r} \times m\vec{V}\right], \qquad (5.1)$$

де $\vec{L}$ – момент імпульсу, $\vec{r}$ – радіус-вектор, $\vec{p}$ - імпульс. Модуль моменту імпульсу визначається за формулою $L = rp\sin\beta = rmV\sin\widehat{\vec{r}\vec{p}}$, де $\widehat{\vec{r}\vec{p}}$ – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{p}$. Знайдемо похідну від моменту імпульсу по часу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left([\vec{r}\times\vec{p}]\right) = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon}] + [\vec{r}\times\vec{F}]. \quad (5.2)$$

Доданок $[\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon}] = 0$ внаслідок колінеарності співмножників, а $[\vec{r}\times\vec{F}] = \vec{M}$ є ***моментом сили*** $\vec{F}$. Модуль моменту сили визначається за формулою $M = Fr\sin\widehat{\vec{F}\vec{r}} = Fl$, де $\widehat{\vec{F}\vec{r}}$ – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$, $l = r\sin\alpha$ – плече сили, що дорівнює відстані від точки, відносно якої визначається момент сили, до лінії сили. Таким чином, момент імпульсу матеріальної точки змінюється під дією суми моментів прикладених до неї сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (5.3)$$

Рівняння (5.3) називають ***рівнянням моментів***. *Отже,* ***умова збереження моменту імпульсу частинки: момент імпульсу частинки зберігається, якщо сумарний момент усіх сил, прикладених до частинки, дорівнює нулю.***

Аналогічно для моменту імпульсу системи частинок $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i$ можна отримати:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^{вн} + \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^{зовн}, \quad (5.4)$$

де $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^{вн}$ позначає суму моментів зовнішніх сил, що діють на систему частинок, а $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^{вн}$ - суму моментів внутрішніх сил. Можна показати, що якщо між частинками системи діють

лише центральні сили, то їх сумарний момент завжди дорівнює нулю ($\vec{M}^{вн} = 0$). Враховуючи це, отримуємо умови зміни та збереження моменту імпульсу системи частинок:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{зовн}, \quad (5.5)$$

тобто ***момент імпульсу системи частинок змінюється, якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, відмінний від нуля; момент імпульсу системи частинок зберігається, якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, дорівнює нулю.***

Тіло, деформаціями якого в умовах даної задачі можна знехтувати, називають ***абсолютно твердим тілом***. Абсолютно тверде тіло можна розбити на нескінченно велику кількість нескінченно малих елементарних об'ємів, які можна вважати матеріальними точками. Тоді його момент імпульсу як момент імпульсу системи матеріальних точок буде дорівнювати:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i\times(\Delta m_i\vec{\upsilon}_i)] = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i[\vec{r}_i\times\vec{\upsilon}_i]. \quad (5.6)$$

При обертальному русі лінійна та кутова швидкості матеріальної точки зв'язані співвідношенням $\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega}\times\vec{r}_i]$, звідки, використовуючи відому формулу $[\vec{a}[\vec{b}\times\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, отримаємо:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i[\vec{r}_i\times[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]] = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i[\vec{\omega}r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})]. \quad (5.7)$$

Оскільки у твердому тілі маса розподілена неперервно, від сумування по Δm_i у (5.7) можна перейти до інтегрування по всьому об'єму абсолютно твердого тіла. Відповідно, вираз для проекції вектора моменту імпульсу на вісь α деякої декартової системи координат набуде вигляду:

$$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\int_V \rho(r^2\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta)\omega_\beta dV, \quad (5.8)$$

де $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \alpha = \beta; \\ 0, \text{ якщо } \alpha \neq \beta \end{cases}$ – символ Кронекера, а $\alpha, \beta = x, y, z$.

Введемо позначення

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \rho(r^2 \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta) dV \,. \qquad (5.9)$$

Упорядкований набір із дев'яти величин $I_{\alpha\beta}$ (5.9), що залежать лише від розподілу мас в абсолютно твердому тілі, визначає в обраній системі координат ***тензор інерції абсолютно твердого тіла***. Вираз для проекцій моменту імпульсу абсолютно твердого тіла можна записати у вигляді:

$$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta} \omega_\beta \quad \text{або} \quad \vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}, \qquad (5.10)$$

де $\hat{I}$ – тензор інерції. Даний вираз є дуже важливим для динаміки твердого тіла, оскільки, по-перше, кутова швидкість, з якою обертається тверде тіло, в кожний момент часу не залежить від вибору осі обертання, що дає підставу ***вважати величину $\vec{\omega}$ єдиною (абсолютною) характеристикою обертального руху твердого тіла*** і називати її кутовою швидкістю обертання твердого тіла як такого, не вказуючи точку, до якої вона віднесена; по-друге, запис виразу для тензора інерції є дуже зручним, оскільки він не потребує вказівки на ту чи іншу систему координат. Відповідним одночасним вибором орієнтації всіх трьох осей системи координат вздовж трьох характерних для кожного тіла взаємно перпендикулярних осей, які називаються ***головними осями твердого тіла***, можна всі недіагональні компоненти тензора інерції перетворити на нуль, тобто тензор інерції набуде діагонального вигляду. Тоді така система координат буде ***головною*** або ***власною*** системою координат цього тензора.

$$\hat{I} = [I_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}. \qquad (5.11)$$

Величини $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ називаються ***головними моментами інерції*** абсолютно твердого тіла. Вони визначають інерційні властивості абсолютно твердого тіла щодо обертання навколо його головних осей. Такими осями для симетричних тіл є осі симетрії. Дійсно, в головній системі координат тензора інерції система рівнянь (5.10) набуде вигляду:

$$L_\alpha = I_\alpha \omega_\alpha \,. \qquad (5.12)$$

Таким чином, з рівняння (5.12) видно, що при обертанні твердого тіла навколо будь-якої з головних осей вектори $\vec{L}$ і $\vec{\omega}$ є паралельними, а тому можна записати таке рівняння

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \qquad (5.13)$$

де величина I називається моментом інерції тіла відносно даної осі. Як видно, з рівняння (5.9), момент інерції є одним з діагональних елементів тензора інерції і визначається за формулою

$$I = \int_V \rho r_\perp^2 dV \,, \qquad (5.14)$$

де $r_\perp$ – відстань від елемента dV до осі обертання.

Отже, з рівнянь (5.5) і (5.13) отримаємо основне рівняння динаміки твердого тіла (рівняння моментів):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta} = \vec{M} \,. \qquad (5.15)$$

Рух гіроскопа

Нехай вісь експериментальної установки для вивчення руху гіроскопа орієнтована горизонтально і з одного боку на цю вісь прикріплено тягарець масою m. Якщо гіроскоп вимкнено, то сила тяжіння створює обертальний момент і гіроскоп має «впасти» на той бік, куди було підвішено тягарець (рис 5.2). Однак, коли гіроскоп увімкнути, так щоб його ротор почав швидко обертатися навколо його осі симетрії, вісь обертання починає

змінювати своє положення в просторі. Гіроскоп починає обертатися навколо вертикальної вісі. Такий рух під дією моменту зовнішніх сил називається ***прецесією***. У разі дії постійних за величиною і напрямком сил прецесія називається ***регулярною***.

Введемо систему координат, як це показано на рис 5.3. Розглянемо докладно рух гіроскопа при його обертанні навколо осі *OY* з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Момент імпульсу $\vec{L}$ та кутова швидкість $\vec{\omega}$ при цьому направлені вздовж вісі *OY*. Згідно з основним законом динаміки обертального руху (рівняння (5.5) і (5.15)), наявність ненульового моменту зовнішніх сил має приводити до зміни моменту імпульсу системи з часом. З рис. 5.3

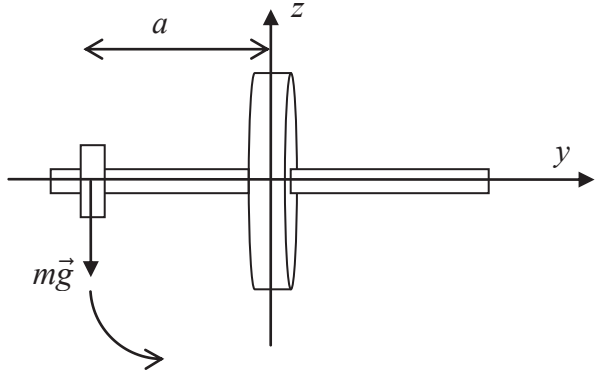


Рис. 5.2. Нерухомий гіроскоп.

видно, що сила тяжіння створює момент сили, направлений вздовж осі *OX:*

$$\vec{M} = \left[\vec{a}, m\vec{g}\right] = \left[-a\vec{j}, -mg\vec{k}\right] = mga\vec{i}\,, \qquad (5.16)$$

де m – маса гіроскопа і a – відстань від центра мас гіроскопа до центра мас тягарця. З формули (5.16) випливає, що приріст моменту імпульсу теж направлений вздовж осі *OX*. У результаті, момент імпульсу набуває нового значення $\vec{L} + d\vec{L}$. Таким чином, результатом дії на гіроскоп моменту сили тяжіння буде обертання

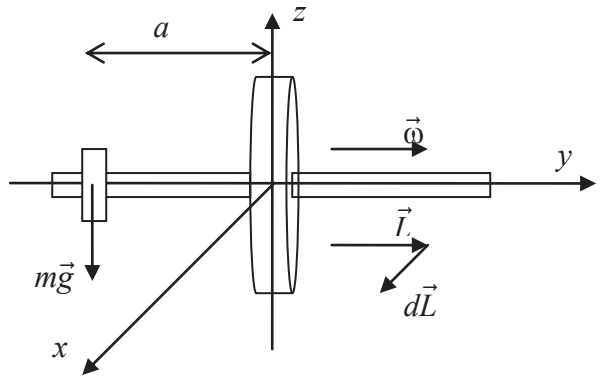


Рис. 5.3. Гіроскоп, що обертається.

осі гіроскопа навколо вертикальної осі *OZ*, гіроскоп почне прецесувати. Кут, на який повернеться вектор моменту імпульсу (а отже і вісь обертання), позначимо $d\varphi$ (рис 5.4). Тому, момент імпульсу гіроскопа дорівнюватиме сумі членів $\vec{L}_\omega$ і $\vec{L}_\Omega$, зумовленого обертанням навколо власної осі *OY* і прецесією навколо осі *OZ* відповідно:

$$\vec{L} = \vec{L}_\omega + \vec{L}_\Omega\,. \qquad (5.17)$$

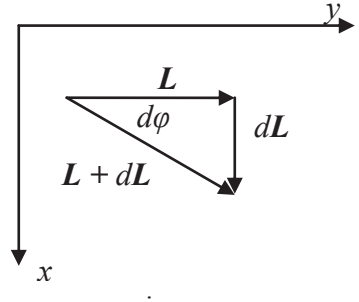


Рис. 5.4. Приріст моменту імпульсу при прецесії гіроскопа.

Слід, проте, зауважити, що внаслідок великої маси гіроскопа і великої швидкості обертання навколо власної осі модуль моменту імпульсу, зумовлений власним обертанням, є набагато більшим, ніж момент імпульсу, зумовлений прецесією: $L_\omega \gg L_\Omega$, а отже можна вважати, що

$$L \approx L_\omega = I\omega . \qquad (5.18)$$

Відповідно до (5.18), вважаємо, що момент імпульсу гіроскопа залишається сталим за модулем, змінюючись лише за напрямком. З рис. 5.4 випливає, що за умови $L = const$:

$$tg\left(d\varphi\right) \approx d\varphi = \frac{\left|d\vec{L}\right|}{L} . \qquad (5.19)$$

Приріст вектора моменту імпульсу гіроскопа $d\vec{L}$ в будь-який момент часу лежить в площині XY. З цього випливає, що вектор моменту імпульсу $\vec{L}$, а отже як вектор кутової швидкості власного обертання $\vec{\omega}$, так і вісь обертання, залишаються в цій самій площині XY.

Визначимо миттєву швидкість обертання цієї вісі, або кутову швидкість прецесії як

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} . \qquad (5.20)$$

З формул (5.20) і (5.19) отримаємо:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left|d\vec{L}\right| / L}{dt} = \frac{1}{L}\frac{\left|d\vec{L}\right|}{dt} . \qquad (5.21)$$

Оскільки з (5.15) випливає, що $\left|d\vec{L}\right| / dt = M$, де $M = mga$ – модуль моменту сили тяжіння, а з (5.18) видно, що модуль моменту імпульсу гіроскопа $L = I\omega$, то з (5.14) можна отримати зв'язок між модулем кутової швидкості прецесії Ω та моментом сили тяжіння і модулем кутової швидкості власного обертання гіроскопа:

$$\Omega = \frac{mga}{I\omega} . \qquad (5.22)$$

ВИМІРЮВАННЯ

У даній роботі експериментально перевіряється залежність (5.22). Досліджується залежність кутової швидкості прецесії Ω від плеча сили тяжіння a, а також залежність кутової швидкості прецесії Ω від кутової швидкості власного обертання гіроскопа ω. З отриманих залежностей визначається значення моменту інерції гіроскопа I. Маса тягарця m наведена на установці.

У роботі необхідно виконати такі вимірювання.

1. При знятому тягарці (10) встановити частоту обертання гіроскопа $f = 40$ Гц і переконатися у відсутності прецесії ($\Omega = 0$ рад/с).
2. Встановити тягарець на вісь (11) гіроскопа. Виміряти відстань a' від бічної поверхні вузла (8) до дальньої від нього площини тягарця. Розрахувати дійсне значення відстані від центру мас гіроскопа до тягарця як $a_1 = a' + 13$ мм.
3. Послідовно змінюючи плече a_1 на Δa_1 = 10 мм, виміряти залежність Ω від a_1 при сталому значенні швидкості обертання гіроскопа ω для 7 різних значень a_1. Результати дослідів занести до таблиці 5.1.

Табл. 5.1

Номер виміру	f, Гц = с$^{-1}$	ω, рад/с	a_1, м	a_2, м	Ω, рад/с
1					
2					
…					
7					

4. Повторити дії пп. 2–3 попередньо встановивши тягарець (10) на протилежну вісь (7) гіроскопа. Розрахувати дійсне значення відстані від центру мас гіроскопа до тягарця як $a_2 = a' + 7$ мм.
5. Зафіксувати значення $a_{1,2}$. Поступово змінюючи кутову швидкість обертання гіроскопа ω виміряти залежність кутової швидкості прецесії Ω від ω при $a_{1,2}$ = const для 7 різних значень частоти обертання гіроскопа. Результати дослідів занести до таблиці 5.2.

Табл. 5.2

Номер виміру	ω, Гц = c^{-1}	ω, рад/с	a_1, м	a_2, м	Ω, рад/с.
1					
2					
…					
7					

Експериментальні завдання

1. Внести в таб. 5.1 і 5.2 частоти обертання гіроскопа у Гц. Знайти кутову швидкість обертання гіроскопа за формулою $\omega = 2\pi f$.
2. За даними таблиці 5.1 побудувати графік залежності $\Omega(a)$. За методом найменших квадратів апроксимувати отриману залежність прямою $\Omega = k_1 a + b_1$.
3. За значенням параметра апроксимації k_1 визначити момент інерції гіроскопа: $I = \dfrac{mg}{k_1 \omega}$.

4. За даними таблиці 5.2 побудувати графік залежності $\Omega\left(\dfrac{1}{\omega}\right)$. За методом найменших квадратів апроксимувати отриману залежність прямою $\Omega = k_2 \dfrac{1}{\omega} + b_2$.
5. За значенням параметра апроксимації k_2 визначити момент інерції гіроскопа: $I = \dfrac{mga}{k_2}$.
6. Розрахувати абсолютну випадкову, абсолютну систематичну, повну абсолютну та повну відносну похибки визначення моменту інерції гіроскопа. Порівняти значення моменту інерції гіроскопа, визначені за пунктами 3 і 5. У разі суттєвої (більше, ніж величина довірчого інтервалу) відмінності цих значень пояснити таку відмінність.

Теоретичні завдання

1. Дайте означення фізичних величин «момент імпульсу» та «момент сили».
2. Отримайте рівняння моментів.
3. Отримайте формулу, що зв'язує момент імпульсу твердого тіла, що обертається, та його кутову швидкість. Запишіть це співвідношення у випадку обертання тіла навколо головних осей. Що такі головні моменти інерції твердого тіла?
4. Що таке прецесія гіроскопа? Що є її причиною? Які умови необхідні для виникнення регулярної прецесії?
5. Отримайте співвідношення, що визначає залежність кутової швидкості прецесії гіроскопа від кутової швидкості його власного обертання та моменту зовнішніх сил, що діють на гіроскоп.
6. Що таке гіроскопічні сили? Що є причиною їх виникнення?
7. Наведіть приклади використання гіроскопів в побуті і техніці.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронна версія // Київ, 2013.
2. И. Е. Иродов, «Основные законы механики» // Москва, Высшая школа, 1985
   або И. Е. Иродов, «Механика. Основные законы» // Москва–Санкт-Петербург, Физматлит, 2001.
3. Сивухин Д.В.. Общий курс физики Механика. т. I М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, - 560 с.
4. Каленков С.Г, Соломахо Г.И. Практикум по физике – М: Высшая школа, 1990 – 111 с.
5. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 3-е изд. — М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. — 432 с.

РОБОТА № 6

ВИВЧЕННЯ ПРУЖНОГО ТА АБСОЛЮТНО НЕПРУЖНОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО УДАРУ КУЛЬ

Мета роботи

1. Перевірити виконання закону збереження імпульсу при пружному та абсолютно непружному ударі куль.
2. Перевірити виконання закону збереження механічної енергії при пружному ударі куль.
3. Пересвідчитися у невиконанні закону збереження механічної енергії при абсолютно непружному ударі куль.

Опис експериментальної установки

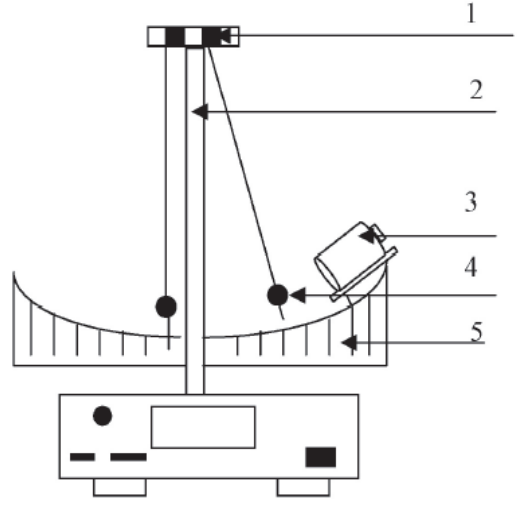


Рис. 6.1. Схема експериментальної установки.

Лабораторна робота виконується на експериментальній установці, зображеній на рис. 6.1. Балістичний динамометр, який

використовується в даній роботі, являє собою настільний прилад. У верхній частині стійки (2) знаходяться кріплення (1) для ниток. До нижніх кінців ниток прикріплено підвіси з різьбою, на яку нагвинчуються кулі (4), зіткнення яких досліджується. Кути відхилення куль до і після зіткнення вимірюються за допомогою шкали (5), проградуйованої у градусах. Права (налітаюча) куля утримується у відхиленому положенні електромагнітом (3). При натисненні кнопки "Пуск" електромагніт вимикається, права куля рухається в напрямку нерухомої лівої кулі, відбувається удар куль, після чого вони відхиляються на кути максимального відхилення, які вимірюються в даній роботі.

Теоретичні відомості

Імпульс. Закон збереження імпульсу

Імпульсом частинки називається векторна фізична величина $\vec{p}$, що визначається як

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}, \tag{6.1}$$

де m – маса частинки, $\vec{\upsilon}$ – її швидкість. Похідна за часом від імпульсу частинки є сума сил, що діють на неї:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j . \tag{6.2}$$

Таким чином причиною зміни імпульсу частинки є сума сил, прикладених до неї. Отже, виходячи зі співвідношення (6.2), можна сформулювати *умову збереження імпульсу частинки:* **імпульс частинки зберігається (залишається сталим), якщо сума сил, що діють на частинку, дорівнює нулю**, а також *закон збереження імпульсу частинки*: **імпульс частинки, на яку не діють сили, зберігається.**

Імпульс системи частинок є адитивною величиною, а тому для системи частинок він дорівнює сумі імпульсів частинок, що утворюють дану систему:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i . \tag{6.3}$$

Для системи частинок похідна за часом від її імпульсу дорівнює лише сумі *зовнішніх сил*, прикладених до частинок системи:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{зовн} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{зовн,i} , \tag{6.4}$$

де $\vec{F}_{зовн,i}$ – сума зовнішніх сил, що діють на i-ту частинки системи. Таким чином, виходячи зі співвідношення (6.4), можна сформулювати *умову збереження імпульсу системи частинок:* **імпульс системи частинок зберігається (залишається сталим), якщо сума зовнішніх сил, що діють на частинки системи, дорівнює нулю**, а також *закон збереження імпульсу системи частинок*: **імпульс системи частинки, на яку не діють зовнішні сили, зберігається.**

Механічна енергія. Закон збереження механічної енергії

Механічна енергія частинки, що знаходиться у зовнішньому потенціальному силовому полі (полі консервативних сил), є сумою кінетичної енергії та потенціальної енергії:

$$E = T + U(\vec{r}) = \frac{m\upsilon^2}{2} + U(\vec{r}) . \tag{6.5}$$

Потенціальним називається стаціонарне силове поле, в якому робота сили поля при переміщенні частинки по довільній замкненій траєкторії дорівнює нулю або, що є еквівалентним, робота цієї сили при переміщенні частинки між двома довільними точками поля не залежить від форми траєкторії. Такі сили називаються консервативними (потенціальними). У свою чергу, сили, що не задовольняють цій умові, називаються неконсервативними, непотенціальними або сторонніми. Похідна за часом від механічної енергії частинки дорівнює сумарній потужності неконсервативних (непотенціальних) сил, що діють на частинку

$$\frac{dE}{dt} = N_{нк} = \vec{F}_{нк} \cdot \vec{\upsilon} \ , \qquad (6.6)$$

де $\vec{F}_{нк}$ – сума неконсервативних сил, що діють на частинку, $\vec{\upsilon}$ – її швидкість. Таким чином, звідси можна сформулювати *умову збереження механічної енергії частинки:* **механічна енергія частинки зберігається, якщо сумарна потужність або робота всіх неконсервативних сил, що діють на частинку, дорівнює нулю**, а також *закон збереження механічної енергії частинки*: **механічна енергія частинки, на яку не діють неконсервативні сили, зберігається.**

Повною механічною енергією системи частинок у полі зовнішніх сил називається сума кінетичної енергії системи, потенціальної енергії взаємодії частинок системи між собою та потенціальної енергії системи у полі зовнішніх консервативних сил:

$$E = T + U + U' = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \sum_{i=1}^{n} U_i'(\vec{r}_i) \ . \qquad (6.7)$$

Зауважимо, що на відміну від імпульсу та моменту імпульсу системи частинок повна механічна енергія системи частинок E у загальному випадку не є адитивною величиною. Адитивність E має місце лише для систем частинок, що не взаємодіють між собою. Похідна за часом від повної механічної енергії системи частинок у полі зовнішніх сил дорівнює сумарній потужності внутрішніх та зовнішніх неконсервативних сил та частинній похідній від зовнішньої потенціальної енергії за часом

$$\frac{dE}{dt} = N_{вн,нк} + N_{зовн,нк} + \frac{\partial U'}{\partial t} \ . \qquad (6.8)$$

Таким чином, можна сформулювати *умову збереження повної механічної енергії системи частинок у полі зовнішніх сил:* **повна механічна енергія системи частинок у полі зовнішніх сил зберігається, якщо поле зовнішніх сил є стаціонарними та сумарна потужність внутрішніх і зовнішніх неконсервативних сил дорівнює нулю**, а також *закон збереження повної механічної енергії системи частинок у полі зовнішніх сил*: **повна механічна енергія системи частинок, на які не діють неконсервативні сили, у стаціонарному полі зовнішніх сил зберігається.**

Види зіткнень частинок

Під зіткненням двох частинок розуміють такий процес, що відбувається внаслідок взаємодії частинок між собою за відсутності впливу інших матеріальних об'єктів, результатом якого є зміна механічного стану цих частинок, зокрема їх швидкостей порівняно з їх початковими швидкостями, які вони мали до зіткнення.

Крім терміну "зіткнення" часто також вживають термін "удар". Зіткнення частинок бувають *пружними* і *непружними*. ***Пружним*** називається зіткнення, при якому механічна енергія замкненої системи двох частинок не змінюється. ***Непружним*** називається зіткнення, при якому механічна енергія замкненої системи частинок змінюється. При непружному зіткненні механічна енергія може як збільшуватись, так і зменшуватись. Слід проте зауважити, що в переважній більшості макроскопічних систем робота дисипативних сил (сил тертя і опору) приводить до зменшення механічної енергії замкненої системи частинок внаслідок переходу частини механічної енергії у внутрішню. Частинним випадком непружного зіткнення є ***абсолютно непружне зіткнення***, при якому частинки після зіткнення зупиняються одна відносно одної, в загальному випадку рухаючись як одне ціле. Таким чином, при абсолютно непружному зіткнення припиняється відносний рух частинок, а залишається лише рух системи частинок як цілого.

Найпростішим є випадок так званого *лобового зіткнення*, коли до і після зіткнення обидві частинки рухаються по траєкторіям, що повністю лежать на одній прямій. У випадку зіткнення (удару) куль для позначення лобового зіткнення також використовують термін *центральний удар*. Очевидно, що більш загальним є випадок *нелобового зіткнення*, коли до або/та після зіткнення

обидві частинки рухаються по траєкторіям, що не лежать на одній прямій. У даній лабораторній роботі пропонується дослідити випадок лобового зіткнення (центрального удару) двох куль.

Теоретичний аналіз лобового удару двох куль

Пружний удар

Закон збереження механічної енергії при пружному ударі

Позначимо кулю, яка налітає індексом "1", а нерухому кулю – "2". У положенні максимального відхилення механічна енергія кулі 1 дорівнює її потенціальній енергії в однорідному полі сили тяжіння

$$E_0 = m_1 g h_0 , \qquad (6.9)$$

де g – прискорення вільного падіння, m_1 – маса кулі 1, h_0 – висота, на якій знаходиться її центр мас відносно положення центру мас цієї кулі у положенні рівноваги. Після звільнення кулі 1 вона почи-

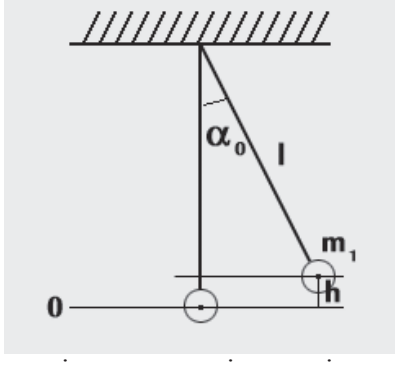


Рис. 6.2. Зв'язок між висотою підняття і кутом відхилення.

нає рух у напрямку нерухомої кулі 2, її потенціальна енергія зменшується, а кінетична зростає. Знехтуємо зменшенням механічної енергії кулі 1 при її русі з положення максимального відхилення в положення, при якому відбувається зіткнення з кулею

2. Це можна зробити з хорошою точністю, оскільки модуль роботи дисипативних сил (сили опору повітря та сили тертя у точці закріплення нитки) за час руху до зіткнення є набагато меншим, ніж механічна енергія кулі 1. У результаті, внаслідок збереження механічної енергії потенціальна енергія налітаючої кулі повністю перетворюється в її кінетичну енергію. Тому безпосередньо перед зіткненням механічна енергія кулі 1 дорівнює

$$E_0 = \frac{m_1 \upsilon^2}{2} = m_1 g h_0 , \qquad (6.10)$$

де υ – модуль її швидкості перед зіткненням. З рис. 6.2 видно, що висоту h_0 можна виразити через відповідний кут максимального відхилення нитки з кулькою від положення рівноваги:

$$h_0 = l - l\cos\alpha_0 = l\left(1-\cos\alpha_0\right) = 2l\sin^2\frac{\alpha_0}{2} , \qquad (6.11)$$

де l – довжина нитки, α_0 – кут максимального відхилення нитки з кулькою від положення рівноваги. Комбінуючи співвідношення (6.10) і (6.11), знайдемо швидкість кулі 1 перед зіткненням:

$$\upsilon = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_0}{2} . \qquad (6.12)$$

Під час зіткнення відбувається деформація обох куль. Оскільки при вивченні пружного удару використовуються сталеві кулі, то деформацію можна вважати пружною, тобто при зіткненні кінетична енергія кулі 1 повністю перетворюється у потенціальну енергію пружної деформації куль. При виникненні пружної деформації куль між ними діють пружні сили, дія яких приводить до відновлення кулями своєї форми і розмірів. У результаті, енергія пружної деформації знову перетворюється у кінетичну енергію, але на цей раз у кінетичну енергію обох куль. Таким чином, при зіткненні куль відбувається перерозподіл механічної енергії між ними, але при цьому механічна (кінетична) енергія куль після зіткнення дорівнюватиме механічній енергії системи до зіткнення, тобто кінетичній енергії кулі 1 безпосередньо перед зіткненням:

$$E_0 = \frac{m_1 \upsilon^2}{2} = E = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \qquad (6.13)$$

де m_2 – маса кулі 2, u_1 і u_2 – швидкості куль 1 і 2 відповідно після зіткнення. Отримавши під час зіткнення кінетичну енергію, кулі відхилятимуться від положення рівноваги до тих пір, поки їх кінетична енергія повністю не перетвориться в потенціальну енергію у полі сили тяжіння:

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} = m_1 g h_1 \quad \text{і} \quad \frac{m_2 u_2^2}{2} = m_2 g h_2 , \qquad (6.14)$$

де h_1 і h_2 – максимальні висоти підняття куль 1 і 2 відповідно після зіткнення. Керуючись міркуваннями, наведеними вище, можна виразити швидкості куль через кути їх максимального відхилення від положення рівноваги:

$$u_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_1}{2} \quad \text{і} \quad u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_2}{2} , \qquad (6.15)$$

де α_1 і α_2 – максимальні кути відхилення куль 1 і 2 відповідно. Таким чином, підставляючи вирази для швидкостей куль зі співвідношень (6.12) і (6.15) у вираз для закону збереження механічної енергії (6.13), отримаємо:

$$E_0 = 2gl m_1 \sin^2\frac{\alpha_0}{2} = E = 2gl\left(m_1 \sin^2\frac{\alpha_1}{2} + m_2 \sin^2\frac{\alpha_2}{2} \right). \qquad (6.16)$$

Кількісною мірою зміни механічної енергії частинок при їх зіткненні є відносна зміна механічної енергії:

$$\eta_E = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E - E_0}{E_0} = \frac{E}{E_0} - 1, \qquad (6.17)$$

де E_0 і E – механічна енергія до і після зіткнення відповідно. Зрозуміло, що у випадку пружного зіткнення $\eta_E = 0$, непружного зі зменшенням механічної енергії $\eta_E < 0$ та непружного зі збільшенням енергії $\eta_E > 0$. Відповідно, відносна зміна механічної

енергії у випадку центрального удару металевих куль згідно з виразами (6.16) і (6.17) дорівнюватиме:

$$\eta_E = \frac{E}{E_0} - 1 = \frac{m_1 \sin^2\frac{\alpha_1}{2} + m_2 \sin^2\frac{\alpha_2}{2}}{m_1 \sin^2\frac{\alpha_0}{2}} - 1 . \qquad (6.18)$$

Закон збереження імпульсу при пружному ударі

Розглянемо виконання закону збереження імпульсу при пружному ударі металевих куль. Згідно з законом збереження імпульсу, імпульс системи частинок зберігається, якщо сума зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю. За проміжок часу, протягом якого відбувається удар, такими силами є сила тяжіння та сили натягу ниток. Оскільки під час зіткнення кулі знаходяться у положенні, близькому до положення рівноваги, то сила тяжіння, що діє на кожну кулю урівноважується відповідною силою натягу нитки. Таким чином, сума зовнішніх сил дорівнює нулю, а тому імпульс системи куль має зберігатися за час удару. Запишемо рівняння закону збереження імпульсу безпосередньо перед ударом і відразу після нього:

$$\vec{P}_0 = m_1 \vec{\upsilon} = \vec{P} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 . \qquad (6.19)$$

Спроектуємо векторне рівняння (6.19) на вісь x, яку направимо вздовж напрямку руху налітаючої кулі 1:

$$P_{0x} = m_1 \upsilon = P_x = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} , \qquad (6.20)$$

де $\upsilon_x = \upsilon > 0$, оскільки $\vec{\upsilon}$ направлено вздовж осі x за визначенням. Скомбінуємо рівняння (6.20) і (6.13), записавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \upsilon = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} ; \\ \dfrac{m_1 \upsilon^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_2 u_{2x} = m_1 \left(\upsilon - u_{1x} \right) ; \\ m_2 u_2^2 = m_1 \left(\upsilon^2 - u_1^2 \right) = m_1 \left(\upsilon - u_{1x} \right)\left(\upsilon + u_{1x} \right). \end{cases} \qquad (6.21)$$

Поділивши 2-ге рівняння системи (6.21) на перше, отримаємо систему:

$$\begin{cases} m_2 u_{2x} = m_1 \left(\upsilon - u_{1x} \right) ; \\ u_{2x} = \upsilon + u_{1x}, \end{cases} \tag{6.22}$$

розв'язками якої будуть проекції швидкостей куль після зіткнення на напрям налітаючої кулі (вісь x):

$$\begin{cases} u_{1x} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \upsilon ; \\ u_{2x} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \upsilon. \end{cases} \tag{6.23}$$

Таким чином, звідси видно, що напрям швидкості 2-ї кулі, що до зіткнення перебувала у стані спокою, після зіткнення завжди співпадатиме з напрямом руху налітаючої кулі. У той же час, напрям швидкості рухомої до зіткнення кулі 1 після зіткнення залежатиме від співвідношення мас куль – якщо маса налітаючої кулі менша, вона змінить напрям свого руху на протилежний, якщо маси куль однакові, налітаюча куля зупиниться і, нарешті, якщо маса налітаючої кулі більша, вона не змінить свого напряму руху.

Уданій роботі маса налітаючої кулі менша ($m_1 < m_2$), а отже, як видно з системи (6.23), після зіткнення напрям її руху зміниться на протилежний. Враховуючи це, рівняння закону збереження імпульсу (6.20) можна записати як

$$P_0 = m_1 \upsilon = P = -m_1 u_1 + m_2 u_2 . \tag{6.24}$$

Зауважимо, що це рівняння записано через модулі відповідних швидкостей. Виражаючи модулі швидкостей через відповідні кути максимального відхилення (6.12) і (6.15), рівняння (6.24) можна записати у вигляді

$$P_0 = 2\sqrt{gl} m_1 \sin\frac{\alpha_0}{2} = P = -2\sqrt{gl} m_1 \sin\frac{\alpha_1}{2} + 2\sqrt{gl} m_2 \sin\frac{\alpha_2}{2} . \tag{6.25}$$

Кількісною мірою виконання закону збереження імпульсу є відносна зміна імпульсу при зіткненні куль

$$\eta_P = \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P - P_0}{P_0} = \frac{P}{P_0} - 1 . \tag{6.26}$$

Відповідно, відносна зміна імпульсу в цьому випадку згідно з виразом (6.26) дорівнюватиме:

$$\eta_P = \frac{P}{P_0} - 1 = \frac{-m_1 \sin\dfrac{\alpha_1}{2} + m_2 \sin\dfrac{\alpha_2}{2}}{m_1 \sin\dfrac{\alpha_0}{2}} - 1 . \tag{6.27}$$

Абсолютно непружний удар

Закон збереження імпульсу при абсолютно непружному ударі

Розглянемо виконання закону збереження імпульсу при абсолютно непружному ударі куль. Як було сказано вище, при абсолютно непружному ударі після зіткнення кулі рухаються разом. У даній роботі абсолютно непружний удар реалізується при зіткненні двох пластилінових куль. Згідно з наведеними вище міркуваннями, аналогічно випадку пружного удару металевих куль, при абсолютно непружному ударі імпульс системи куль також має зберігатися за час удару. Запишемо рівняння закону збереження імпульсу для абсолютно непружного удару безпосередньо перед ударом і відразу після нього:

$$\vec{P}_0 = m_3 \vec{\upsilon} = \vec{P} = \left(m_3 + m_4 \right) \vec{u} , \tag{6.28}$$

де $\vec{\upsilon}$ – швидкість налітаючої кулі масою m_3 до зіткнення, $\vec{u}$ – швидкість спільного руху куль з масами m_3 і m_4 після зіткнення. Очевидно, що напрями швидкостей $\vec{\upsilon}$ та $\vec{u}$ співпадатимуть. Спроектуємо векторне рівняння (6.28) на напрям руху налітаючої кулі 1:

$$P_0 = m_3 \upsilon = P = \left(m_3 + m_4 \right) u . \tag{6.29}$$

Виражаючи модулі швидкостей через відповідні кути максимального відхилення за допомогою виразів (6.12) і (6.15), рівняння (6.29) можна записати у вигляді

$$P_0 = 2\sqrt{gl} m_3 \sin\frac{\beta_0}{2} = P = 2\sqrt{gl} \left(m_3 + m_4 \right) \sin\frac{\beta}{2} , \tag{6.30}$$

де β_0 та β – кути максимального відхилення налітаючої кулі 3 до зіткнення та сукупності куль 3 і 4 після зіткнення. Кількісною мірою виконання закону збереження імпульсу є відносна зміна імпульсу при зіткненні:

$$\eta_P = \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P}{P_0} - 1 = \frac{\left(m_3 + m_4\right)\sin\frac{\beta}{2}}{m_3 \sin\frac{\beta_0}{2}} - 1 . \qquad (6.31)$$

Зміна механічної енергії при абсолютно непружному ударі

Як і при зіткненні металевих куль, при зіткненні пластилінових куль відбувається деформація обох куль. При зіткненні металевих куль відбувається їх пружна деформація, при якій відбувається лише перехід кінетичної енергії налітаючої кулі в потенціальну енергію пружної деформації, а отже механічна енергія системи куль зберігається. Проте, при ударі пластилінових куль відбувається їх пластична деформація, при якій між кулями діють дисипативні сили, які є неконсервативними, робота яких за час удару зменшуватиме механічну енергію системи куль: $E < E_0$. У той же час, після зіткнення внаслідок малості роботи сил опору повітря механічна енергія системи куль, які рухатимуться разом, зберігатиметься. Таким чином, запишемо механічну енергію системи пластилінових куль до і після удару:

$$E_0 = \frac{m_3 \upsilon^2}{2} = m_3 g h_0 = 2 g l m_3 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} , \qquad (6.32)$$

$$E = \frac{\left(m_3 + m_4\right)u^2}{2} = \left(m_3 + m_4\right) g h = 2 g l \left(m_3 + m_4\right) \sin^2 \frac{\beta}{2} . \qquad (6.33)$$

Таким чином, відносна зміна механічної енергії куль при їх абсолютно непружному ударі:

$$\eta_E = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E}{E_0} - 1 = \frac{\left(m_3 + m_4\right)\sin^2\frac{\beta}{2}}{m_3 \sin^2\frac{\beta_0}{2}} - 1 . \qquad (6.34)$$

ВИМІРЮВАННЯ

У даній роботі необхідно експериментально встановити факти збереження чи незбереження імпульсу та механічної енергії пари металевих та пластилінових куль при їх центральному ударі. Маси металевих куль m_1, m_2 та пластилінових куль m_3, m_4 наведено на установці. Вимірюють кути максимального відхилення куль до зіткнення α_0, β_0 та після зіткнення α_1, α_2 і β, а також довжину ниток-підвісів l.

Провести такі вимірювання.

1. Закріпити металеві кулі 1 і 2 на нитках-підвісах за допомогою різьби. Відцентрувати кулі для забезпечення центрального (лобового) удару так, щоб поверхні куль дотикалися, а їх центри лежали на горизонтальній прямій, паралельній до вимірювальної шкали.
2. Виміряти довжину нитки-підвісу l як відстань між точкою закріплення нитки та центром кулі.
3. Увімкнути тумблер “Сеть”.
4. При ненатиснутій кнопці “Пуск” відхилити кулю 1 (кулю з меншою масою) на кут $\alpha_0 = 15^0$ та зафіксувати її електромагнітом.
5. Натиснувши кнопку “Пуск”, звільнити кулю 1.
6. Виміряти за шкалою, проградуйованою у градусах, кути максимального відхилення α_1 і α_2 куль 1 і 2 відповідно після їх зіткнення.
7. Виміри виконати не менше 10 разів.
8. Обчислити середні значення кутів $\langle\alpha_1\rangle$ і $\langle\alpha_2\rangle$.
9. Результати вимірів занести до таблиці 6.1.
10. Закріпити пластилінові кулі 3 і 4 на нитках-підвісах за допомогою різьби. Відцентрувати кулі для забезпечення центрального (лобового) удару так, щоб поверхні куль

дотикалися, а їх центри лежали на горизонтальній прямій, паралельній до вимірювальної шкали.

Табл. 6.1

Номер виміру	α_1, ^{0}	$\langle\alpha_1\rangle$, ^{0}	α_2, ^{0}	$\langle\alpha_2\rangle$, ^{0}
1				
2				
…				
10				

11. Виміряти довжину нитки-підвісу l як відстань між точкою закріплення нитки та центром кулі.
12. Увімкнути тумблер “Сеть”.
13. При ненатиснутій кнопці “Пуск” відхилити кулю 3 на кут $\beta_0 = 15^0$ та зафіксувати її електромагнітом, використовуючи металеву вкладку в пластиліні.
14. Натиснувши кнопку “Пуск”, звільнити кулю 3.
15. Виміряти за шкалою, проградуйованою у градусах, кут максимального відхилення β пари куль 3 і 4, що рухаються разом після їх абсолютно непружного зіткнення.
16. Виміри виконати не менше 10 разів.
17. Обчислити середнє значення кута $\langle\beta\rangle$.
18. Результати вимірів занести до таблиці 6.2.

Табл. 6.2

Номер виміру	β, ^{0}	$\langle\beta\rangle$, ^{0}
1		
2		
3		
…		
10		

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Використовуючи середні значення виміряних кутів α_0, α_1 і α_2, дані в роботі маси металевих куль m_1 і m_2 та довжину підвісів l за формулою (6.25) розрахувати імпульс системи металевих куль до та після удару.
2. За формулою (6.27) розрахувати відносну зміну імпульсу металевих куль η_P при їх лобовому ударі. Зробити висновок про обгрунтованість припущення про виконання закону збереження імпульсу при такому ударі.
3. Оцінити абсолютну та відносну похибки визначення імпульсу системи куль до та після удару. Записати довірчий інтервал для імпульсу системи куль до та після удару. Пояснити можливі причини виникнення похибок при перевірці виконання закону збереження імпульсу при ударі металевих куль.
4. Використовуючи середні значення виміряних кутів α_0, α_1 і α_2, дані в роботі маси металевих куль m_1 і m_2 та довжину підвісів l за формулою (6.16) розрахувати механічну енергію системи металевих куль до та після удару.
5. За формулою (6.18) розрахувати відносну зміну механічної енергії металевих куль η_E при їх лобовому ударі. Зробити висновок про справедливість припущення про пружність удару металевих куль.
6. Оцінити абсолютну та відносну похибки визначення механічної енергії системи куль до та після удару. Записати довірчий інтервал для механічної енергії системи куль до та після удару. Пояснити можливі причини виникнення похибок при перевірці виконання закону збереження механічної енергії при ударі металевих куль.
7. Використовуючи середні значення виміряних кутів β_0 і β та дані в роботі маси металевих куль m_3 і m_4 за формулою (6.30) розрахувати імпульс системи пластилінових куль до та після удару.

8. За формулою (6.31) розрахувати відносну зміну імпульсу пластилінових куль η_P при їх лобовому ударі. Зробити висновок про обгрунтованість припущення про виконання закону збереження імпульсу при такому ударі.
9. Розрахувати абсолютну та відносну похибки визначення імпульсу системи пластилінових куль до та після удару. Записати довірчий інтервал для імпульсу системи пластилінових куль до та після удару. Пояснити можливі причини виникнення похибок при перевірці виконання закону збереження імпульсу при ударі пластилінових куль.
10. Використовуючи середні значення виміряних кутів β_0 і β та дані в роботі маси металевих куль m_3 і m_4 за формулою (6.33) розрахувати механічну енергію системи пластилінових куль до та після удару.
11. За формулою (6.34) розрахувати відносну зміну механічної енергії пластилінових куль η_E при їх лобовому ударі.
12. Розрахувати абсолютну та відносну похибки визначення механічної енергії системи пластилінових куль до та після удару. Записати довірчий інтервал для механічної енергії системи пластилінових куль до та після удару. Пояснити можливі причини виникнення похибок при визначенні механічної енергії у досліді з абсолютно непружним ударом.

Теоретичні завдання

1. Дати означення імпульсу частинки та системи частинок. Сформулювати умови зміни та збереження імпульсу частинки і системи частинок.
2. Дати означення внутрішніх та зовнішніх сил для системи частинок.
3. Дати означення механічної енергії частинки та системи частинок. Сформулювати умови зміни та збереження механічної енергії частинки і системи частинок.

4. Дати означення консервативних (потенціальних) та неконсервативних (непотенціальних) сил.
5. Що таке дисипативні сили? До яких сил (консервативних чи неконсервативних) вони належать? Як і чому робота дисипативних сил впливає на механічну енергію частинки/системи частинок?
6. Дати означення пружного, непружного та абсолютно непружного зіткнення (удару) частинок.
7. Дати означення центрального (лобового) та нецентрального (нелобового) зіткнення (удару) частинок.
8. Пояснити, які перетворення енергії відбуваються в ході експериментів з металевими та пластиліновими кулями.
9. Отримати вирази для визначення імпульсу та механічної енергії системи куль при пружному лобовому ударі куль.
10. Отримати вирази для визначення імпульсу та механічної енергії системи куль при абсолютно непружному лобовому ударі куль.
11. Пояснити причину пружності удару металевих куль.
12. Пояснити причину непружності удару пластилінових куль.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
2. И. Е. Иродов, «Основные законы механики» // Москва, Высшая школа, 1985.
   або И. Е. Иродов, «Механика. Основные законы» // Москва–Санкт-Петербург, Физматлит, 2001.
3. С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо, «Практикум по физике. Механика» // Москва, Высшая школа, 1990.
4. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Механика» // Москва, Наука, 1979 – 1993.
5. А. Н. Матвеев, «Механика и теория относительности» // Москва, Высшая школа, 1986.

РОБОТА № 7

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ КУЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ КРУТИЛЬНОГО БАЛІСТИЧНОГО МАЯТНИКА

МЕТА РОБОТИ

1. Визначити швидкість польоту балістичного об’єкту (кулі) за допомогою крутильного балістичного маятника.
2. З’ясувати умови збереження і зміни механічної енергії та моменту імпульсу при абсолютно непружному зіткненні кулі з крутильним маятником та його подальших коливаннях.

ОПИС ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ

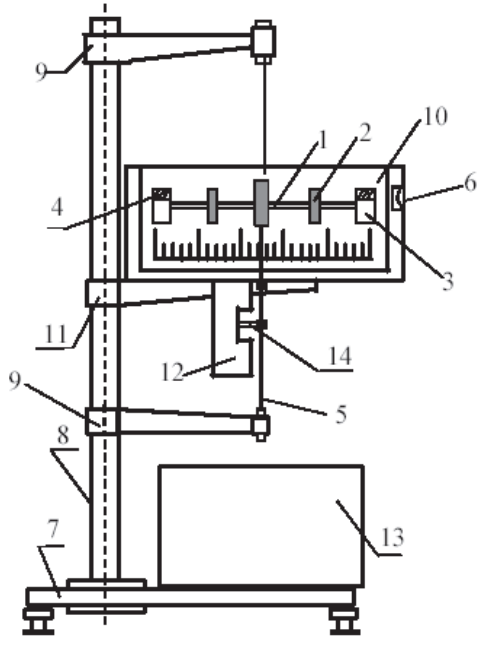


Рис. 7.1. Схема експериментальної установки.

Лабораторна робота виконується на крутильному балістичному маятнику, зображеному на рис. 7.1. Крутильний балістичний маятник являє собою настільний прилад. На вертикальній стійці (8), встановленій на основі (7), кріпляться два кронштейни (9). Між верхнім і нижнім кронштейнами (9) на сталевій струні (5) жорстко закріплено підвіс, що являє собою стержень (1) з двома тягарцями однакової маси (2), які можна пересувати в горизонтальному напрямку. На кінцях стержня знаходяться мішені (3) та (4), що являють собою чашечки з пластиліном. Внизу кронштейна (11) розміщено фотоелектричний датчик (12), зв'язаний з вимірювальним блоком (13). До струни також жорстко приєднано стержень-індикатор (14), який в процесі коливань періодично перекриває світловий пучок у фотоелектричному датчику (12), сигнал з якого надходить у вимірювальний блок (13). Вимірювальний блок дозволяє вимірювати кількість коливань, які здійснив маятник (підвіс) та час, протягом якого ці коливання відбулися. Пружинний пістолет (6) – металева трубка, з закритого краю якої знаходиться пружина.

Після пострілу з пружинного пістолета куля прилипає до пластиліну в мішені підвісу, маятник відхиляється від положення рівноваги. Відхилення маятника від положення рівноваги приводить до деформації (закручування) металевої струни. Деформація струни спричинює виникнення моменту пружних сил, які намагаються повернути маятник в положення рівноваги, викликаючи його крутильні коливання. Кут повороту маятника відносно вертикальної осі, що співпадає зі струною, визначається за шкалою, градуйованою у градусах.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Пряме вимірювання швидкостей тіл, що досягають значної величини (200 – 1000 м/с і більше) вимагає спеціальної апаратури і методики експерименту, наприклад, швидкісної і надшвидкісної відеозйомки. Втім, для визначення швидкостей розглянутого

діапазону також застосовують непрямі методи, до яких, зокрема, належить метод балістичного маятника. У цьому методі балістичний об'єкт (у даній роботі куля) внаслідок абсолютно непружного зіткнення з мішенню, що є складовою частиною маятника, зумовлює виникнення його коливань. Вимірюючи амплітуду і період коливань, а також використовуючи рівняння законів збереження механічної енергії та моменту імпульсу, визначають швидкість кулі. Зазначимо, що маятник вважається балістичним, якщо час зіткнення кулі з ним є набагато меншим, ніж період коливань маятника.

Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

Моментом імпульсу частинки називається векторна фізична величина $\vec{L}$, що визначається як

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = m[\vec{r} \times \vec{\upsilon}], \qquad (7.1)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, що задає положення частинки відносно початку відліку, m, $\vec{p}$ та $\vec{\upsilon}$ – її маса, імпульс і швидкість відповідно. Важливою особливістю моменту імпульсу є те, що він залежить від того, відносно якої точки простору він визначається. Момент імпульсу є адитивною величиною, а тому для системи частинок він дорівнює сумі моментів імпульсу частинок, що утворюють дану систему:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]. \qquad (7.2)$$

У випадку, якщо при русі твердого тіла його деформації є малими порівняно з розмірами тіла, деформаціями можна знехтувати. У цьому випадку реальне тверде тіло можна описувати моделлю *абсолютно твердого тіла*, тобто системи частинок, відстані між якими не змінюються у процесі руху. Оскільки тверде тіло можна розглядати як систему частинок, то для визначення його моменту імпульсу можна використати визначення (7.2). При

довільному русі твердого тіла його момент імпульсу можна представити як суму двох складових

$$\vec{L} = \vec{L}_{пост} + \vec{L}_{об} \ . \qquad (7.3)$$

Перша складова $\vec{L}_{пост}$ зумовлена рухом тіла як цілого

$$\vec{L}_{пост} = \left[\vec{R}_C \times \vec{P} \right], \qquad (7.4)$$

де $\vec{R}_C$ – радіус-вектор центру мас тіла, а $\vec{P} = M\vec{\upsilon}_C$ – імпульс тіла, зумовлений його рухом як цілого (поступальним рухом), M – маса тіла, $\vec{\upsilon}_C$ – швидкість його центру мас. Друга складова $\vec{L}_{об}$ зумовлена обертальним рухом тіла, причому при цьому визначається вона відносно центру мас твердого тіла. Оскільки в даній роботі ми розглядатимемо лише обертальний рух тіла (крутильного маятника), то надалі індекс "об" ми опускатимемо: $\vec{L}_{об} \equiv \vec{L}$. Проекції вектора $\vec{L}$

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \ , \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \ , \quad \Leftrightarrow \ L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}\omega_\beta \ , \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \qquad (7.5)$$

де $\alpha, \beta = x, y, z$, ω_β – проекція кутової швидкості тіла на вісь β, а $I_{\alpha\beta}$ – компонента тензора інерції твердого тіла. За умови, що координатні осі співпадають з так званими *головними осями* твердого тіла, недіагональні компоненти тензора інерції дорівнюють нулю, а отже тензор інерції набуває діагонального вигляду

$$\begin{aligned} L_x &= I_x\omega_x \ , \\ L_y &= I_y\omega_y \ , \quad \Leftrightarrow \ L_\alpha = I_{\alpha\alpha}\omega_\alpha \, , \\ L_z &= I_z\omega_z \end{aligned} \qquad (7.6)$$

де $I_{\alpha\alpha}$ – так звані *головні моменти інерції* твердого тіла. Якщо обертання твердого тіла відбувається відносно нерухомої осі (нехай цією віссю буде вісь z), то єдиними ненульовими

компонентами моменту імпульсу та кутової швидкості тіла будуть z-компоненти:

$$L_z = I_{zz}\omega_z \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}\ , \tag{7.7}$$

де скалярну величину $I_{zz} = I$ у випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі називають *моментом інерції (тіла) відносно осі.* Для обчислення моменту інерції тверде тіло необхідно уявно розбити на нескінченно малі елементи-об'єми, які можна вважати матеріальними точками, а потім виконати інтегрування по всьому об'єму тіла:

$$I = I_{zz} = \int_V \rho r_\perp^2 dV\ , \tag{7.8}$$

де $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ – відстань від такого елементарного об'єму до осі обертання.

Похідна за часом від моменту імпульсу частинки є сума моментів сил, що діють на неї:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j = \sum_{j=1}^{m} \left[\vec{r} \times \vec{F}_j\right]. \tag{7.9}$$

Таким чином причиною зміни моменту імпульсу частинки є сумарний момент сил, прикладений до неї. Отже, виходячи зі співвідношення (7.9), можна сформулювати *закон збереження моменту імпульсу частинки:* **момент імпульсу частинки зберігається (залишається сталим), якщо сумарний момент сил, прикладених до неї, дорівнює нулю.**

Для системи частинок похідна за часом від її моменту імпульсу дорівнює лише сумі *моментів зовнішніх сил*, прикладених до частинок системи:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{зовн} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{зовн,i}\ , \tag{7.10}$$

де $\vec{M}_{зовн,i}$ – сума зовнішніх сил, прикладених до i-ї частинки системи. Таким чином, виходячи зі співвідношення (7.10), можна сформулювати *закон збереження моменту імпульсу системи частинок:* **момент імпульсу системи частинок зберігається (залишається сталим), якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, дорівнює нулю.**

Механічна енергія. Закон збереження механічної енергії

Механічна енергія частинки, що знаходиться у зовнішньому потенціальному силовому полі (полі консервативних сил), є сумою кінетичної енергії (енергії руху) та потенціальної енергії:

$$E = T + U\left(\vec{r}\right) = \frac{m\upsilon^2}{2} + U\left(\vec{r}\right). \tag{7.11}$$

Потенціальним називається стаціонарне силове поле, в якому робота сили поля при переміщенні частинки по довільній замкненій траєкторії дорівнює нулю або, що є еквівалентним, робота цієї сили при переміщенні частинки між двома довільними точками поля не залежить від форми траєкторії. Такі сили називаються консервативними (потенціальними). У свою чергу, сили, що не задовольняють даній умові, називаються неконсервативними, непотенціальними або сторонніми. Похідна за часом від механічної енергії частинки дорівнює сумарній потужності неконсервативних (непотенціальних) сил, що діють на частинку:

$$\frac{dE}{dt} = N_{нк} = \vec{F}_{нк} \cdot \vec{\upsilon}\ , \tag{7.12}$$

де $\vec{F}_{нк}$ – сума неконсервативних сил, що діють на частинку, а $\vec{\upsilon}$ – її швидкість. Таким чином, звідси можна сформулювати сформулювати *закон збереження механічної енергії частинки:* **механічна енергія частинки зберігається, якщо сумарна потужність або робота всіх неконсервативних сил, що діють на неї, дорівнює нулю.**

Повною механічною енергією системи частинок у полі зовнішніх сил називається сума кінетичної енергії системи, потенціальної енергії взаємодії частинок системи між собою та

потенціальної енергії системи у полі зовнішніх консервативних сил:

$$E = T + \tilde{U} + U = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tilde{U}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \sum_{i=1}^{n} U_i(\vec{r}_i) . \qquad (7.13)$$

Зауважимо, що на відміну від імпульсу та моменту імпульсу повна механічна енергія системи E у загальному випадку не є адитивною величиною. Адитивність E має місце лише для систем частинок, що не взаємодіють між собою. Похідна за часом від повної механічної енергії системи частинок у полі зовнішніх сил дорівнює сумарній потужності внутрішніх та зовнішніх неконсервативних сил та частинній похідній від зовнішньої потенціальної енергії за часом

$$\frac{dE}{dt} = N_{вн,нк} + N_{зовн,нк} + \frac{\partial U}{\partial t} . \qquad (7.14)$$

Таким чином, звідси можна сформулювати *закон збереження повної механічної енергії системи частинок у полі зовнішніх сил:* **повна механічна енергія системи частинок у полі зовнішніх сил зберігається, якщо поле зовнішніх сил є стаціонарним та сумарна потужність внутрішніх і зовнішніх неконсервативних сил дорівнює нулю.**

Оскільки тверде тіло являє собою систему частинок, то для нього справедливим є все сказане вище. Механічна енергія абсолютно твердого тіла, що здійснює довільний рух, є сумою його кінетичної енергії поступального руху, обертального руху відносно нерухомої осі, що проходить через його центр мас, а також потенціальної енергії у полі зовнішніх сил

$$E = T_{пост} + T_{об} + U = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + U , \qquad (7.15)$$

де υ_C – швидкість руху тіла як цілого (швидкість центру мас), I – момент інерції відносно згаданої осі і ω – кутова швидкість обертання відносно цієї осі.

Види зіткнень частинок

Під зіткненням двох частинок розуміють такий процес, що відбувається внаслідок взаємодії частинок між собою за відсутності впливу інших матеріальних об'єктів, результатом якого є зміна механічного стану цих частинок, зокрема їх швидкостей порівняно з їх початковими швидкостями, які вони мали до зіткнення. Зіткнення частинок бувають *пружними* і *непружними.* ***Пружним*** називається зіткнення, при якому механічна енергія системи частинок не змінюється. ***Непружним*** називається зіткнення, при якому механічна енергія системи частинок змінюється. При непружному зіткненні механічна енергія може як збільшуватись, так і зменшуватись. Слід проте зауважити, що в переважній більшості макроскопічних систем дія дисипативних сил (сил тертя і опору) приводить до зменшення механічної енергії системи частинок внаслідок переходу частини механічної енергії у внутрішню. Частинним випадком непружного зіткнення є ***абсолютно непружне зіткнення***, при якому частинки після зіткнення зупиняються одна відносно одної, в загальному випадку рухаючись як одне ціле. Таким чином, при абсолютно непружному зіткнення припиняється відносний рух частинок, а залишається лише рух системи частинок як цілого.

Гармонічні коливання

Механічним коливним рухом (коливанням) називається механічний рух, який характеризується регулярною повторюваністю (періодичністю) механічного стану частинки або системи частинок, причому напрямки швидкостей частинок протягом періоду коливань двічі змінюються на протилежний. Коливання виникають при виведенні коливної системи тим чи іншим способом з положення рівноваги (наданням початкового відхилення або поштовху або і відхилення і поштовху разом). Коливання, які відбуваються після виведення коливної системи з

положення рівноваги вільно (без зовнішніх втручань) називаються *вільними* або *власними* коливаннями.

У даній роботі коливання маятника супроводжуються періодичною зміною кута відхилення маятника від положення рівноваги φ. Зауважимо, що лише коливання з малою амплітудою (малі коливання: $|\varphi| \ll 1$, де кут подано у радіанах) є гармонічними, тобто такими, для яких залежність величини, що періодично змінюється (у цій роботі кута φ), від часу описується гармонічними функціями – косинусом або синусом. У випадку, коли у системі відсутні дисипативні сили або ними можна знехтувати, коливання будуть *незгасаючими*, тобто вони існуватимуть нескінченно довго. У випадку *вільних незгасаючих коливань* залежність $\varphi(t)$ визначається як

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (7.16)$$

де φ_m – амплітуда коливань (максимальне значення величини, що періодично змінюється, у даній роботі кута), ω_0 – циклічна власна частота коливної системи. Величина $(\omega_0 t + \alpha)$ називається фазою коливань, а α – початковою фазою коливань. Періодом коливань називається час, за який фаза коливань змінюється на 2π: $\omega_0 t + \alpha + 2\pi = \omega_0 (t + T) + \alpha$, звідки отримаємо зв'язок між періодом і частотою

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (7.17)$$

Рівнянням руху системи, що здійснює вільні незгасаючі гармонічні коливання, є так зване рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \qquad (7.18)$$

розв'язком якого є гармонічні функції типу (7.16).

Теоретичний аналіз руху крутильного балістичного маятника

Після попадання кулі в маятник він застряє у пластиліні, тобто зіткнення кулі з маятником є абсолютно непружним. У результаті зіткнення маятник відхиляється від положення рівноваги, струна закручується. При закручуванні струни виникає момент пружних сил, що намагається повернути маятник до положення рівноваги, тобто виникають крутильні коливання навколо вертикальної осі, що співпадає зі струною (вісь z) – див. рис. 7.2.

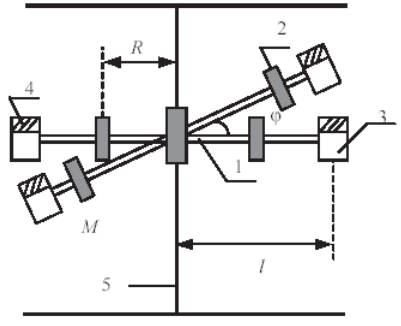


Рис. 7.2. Коливальний рух маятника.

З'ясуємо, які закони збереження можна використати для аналізу руху маятника. Оскільки сила опору, що діє на кулю при її зіткненні з маятником, є дисипативною, то звідси очевидно, що механічна енергія системи "куля–маятник" за час зіткнення не зберігається. У той же час, після зіткнення, враховуючи малість дисипативних сил, які діють на маятник (наприклад, сили опору з боку повітря), роботою цих сил можна знехтувати. Тому можна вважати, що після зіткнення механічна енергія цієї системи зберігається. Отже, енергія маятника відразу після зіткнення (кінетична енергія обертання) дорівнюватиме потенціальній енергії пружної деформації струни:

$$\frac{\left(I+ml^2\right)\omega^2}{2} = \frac{D\varphi_m^2}{2} \quad , \tag{7.19}$$

де $I+ml^2$ – момент інерції системи "куля–маятник" відносно осі маятника, l – відстань від точки попадання кулі до осі, ω – кутова швидкість маятника відразу після зіткнення, φ_m – максимальний кут відхилення маятника від положення рівноваги, D – коефіцієнт пружного кручення струни.

На маятник діють сила тяжіння та сили реакції з боку кронштейнів. Сила тяжіння урівноважена вертикальними складовими сил реакції, а момент горизонтальних складових сил реакції, що діють під час зіткнення, відносно осі обертання рівний нулю, оскільки вони прикладені у точках, що знаходяться на осі обертання (струна). Тому звідси зрозуміло, що момент імпульсу системи "куля–маятник" зберігається завжди. Запишемо рівняння закону збереження моменту імпульсу в моменти часу до зіткнення і відразу після нього. Спроектувавши момент імпульсу системи на вісь обертання, отримаємо:

$$m\upsilon l = \left(I+ml^2\right)\omega \ . \tag{7.20}$$

З рівнянь (7.19) і (7.20) отримаємо:

$$\upsilon = \frac{\varphi_m}{ml}\sqrt{\left(I+ml^2\right)D} \approx \frac{\varphi_m}{ml}\sqrt{ID} \ , \tag{7.21}$$

де наближений вираз отримано, знехтувавши моментом інерції кулі порівняно з моментом інерції маятника, оскільки $ml^2 \ll I$.

Оскільки у роботі момент інерції маятника і коефіцієнт кручення струни невідомі, необхідно записати додаткові співвідношення, які дали б змогу виключити їх з робочої формули. Запишемо вираз для енергії маятника в довільний момент часу після попадання кулі:

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{D\varphi^2}{2} = const \ , \tag{7.22}$$

де φ – кут відхилення маятника від положення рівноваги, $\dot{\varphi} = \omega$ – кутова швидкість маятника. У співвідношенні (7.22) знехтувано моментом інерції кулі. Продиференціюємо вираз (7.22) за часом: $I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + D\varphi\dot{\varphi} = 0$. Скоротивши на $\dot{\varphi}$, отримаємо рівняння гармонічного осцилятора:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{I}\varphi = 0 \ . \tag{7.23}$$

Як випливає з викладеного вище, у цьому рівнянні коефіцієнт біля φ є квадратом частоти коливань маятника $\omega_0^2 = D/I$, а отже період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \ . \tag{7.24}$$

З виразу (7.24) отримаємо:

$$D = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \ , \tag{7.25}$$

звідки

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi_m}{mlT} I \ . \tag{7.26}$$

Знайдемо момент інерції маятника з двома тягарцями масою M кожен. Оскільки момент інерції системи тіл є величиною адитивною, то момент інерції такої системи дорівнюватиме сумі моменту інерції маятника без тягарців I_0 і моментів інерції тягарців:

$$I = I_0 + 2MR^2 \ , \tag{7.27}$$

де M – маса тягарця, R – відстань від центру мас тягарця до осі обертання маятника. Нехай R_1 – мінімальна відстань від центру тягарця до осі маятника, а R_2 – максимальна відстань. Позначимо: $I_1 = I_0 + 2MR_1^2$ і $I_2 = I_0 + 2MR_2^2$, у результаті отримаємо:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = 2M\left(R_2^2 - R_1^2\right). \tag{7.28}$$

З виразу (7.25) маємо:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{I_1+\Delta I}{I_1}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad I_1=\Delta I\frac{T_1^2}{T_2^2-T_1^2}. \qquad (7.29)$$

У результаті з виразу (7.26) для швидкості кулі отримаємо $\upsilon=\frac{2\pi\varphi_{m1}}{mlT_1}I_1 \Rightarrow \upsilon=\frac{2\pi\varphi_{m1}}{ml}\Delta I\frac{T_1}{T_2^2-T_1^2}$, звідки

$$\upsilon=\frac{4\pi M}{ml}\frac{\varphi_{m1}T_1}{T_2^2-T_1^2}\left(R_2^2-R_1^2\right). \qquad (7.30)$$

З виразу (7.30) видно, що $\varphi_{m1}T_1=\varphi_{m2}T_2=const$, а тому у нього для вищої точності визначення швидкості кулі доцільно замість $\varphi_{m1}T_1$ підставляти $\frac{1}{2}\left(\varphi_{m1}T_1+\varphi_{m2}T_2\right)$:

$$\upsilon=\frac{2\pi M}{ml}\frac{\varphi_{m1}T_1+\varphi_{m2}T_2}{T_2^2-T_1^2}\left(R_2^2-R_1^2\right). \qquad (7.31)$$

Вимірювання

У даній роботі швидкість кулі визначається за формулою (7.31). Маса кулі m та маси тягарців M, а також відстань від мішені (точки попадання кулі) до осі маятника l наведено на установці. Експериментально визначаються періоди T_1 і T_2 коливань маятника та кути максимального відхилення маятника від положення рівноваги φ_{m1} і φ_{m2}, що відповідають мінімальній R_1 і максимальній R_2 відстаням від центру кожного тягарця до осі маятника.

Провести такі вимірювання.

1. Максимально зблизити тягарці між собою та виміряти відстань R_1 від центру тягарця до осі.
2. Встановити маятник в положення “0”.

3. Вистрілити кулю з пружинного пістолета.
4. Виміряти за шкалою, градуйованою у градусах, максимальний кут відхилення φ_{m1}, зупинити маятник.
5. Виміри виконати не менше 10 разів.
6. Обчислити середнє значення $\langle\varphi_{m1}\rangle$.
7. Увімкнути тумблер “Сеть” і занулити електронний секундомір.
8. Відхилити маятник на кут $\langle\varphi_{m1}\rangle$, відпустити маятник та ввімкнути секундомір.
9. Виміряти час t_1 для N коливань (N=10) та визначити період коливань: $T_1=t_1/N$.
10. Виміри виконати не менше 10 разів.
11. Обчислити середнє значення $\langle T_1\rangle$.
12. Максимально віддалити тягарці між собою та виміряти відстань R_2 від центру тягарця до осі.
13. Повторити усі вимірювання, наведені вище, для положення тягарців R_2.
14. Визначити середнє значення кута максимального відхилення $\langle\varphi_{m2}\rangle$ та періоду $\langle T_2\rangle$.
15. Результати вимірів занести до таблиці 7.1.

Табл. 7.1

№	R_1, см	φ_{m1}, ^{0}	$\langle\varphi_{m1}\rangle$, ^{0}	φ_{m2}, ^{0}	$\langle\varphi_{m2}\rangle$, ^{0}	T_1, с	$\langle T_1\rangle$, с	T_2, с	$\langle T_2\rangle$, с
1									
2									
3									
…									
10									

16. Оцінити середню величину заглиблення h кулі в пластилін.

Експериментальні завдання

1. Використовуючи дані в роботі та середні значення виміряних величин, згаданих вище, за формулою (7.31) розрахувати швидкість кулі υ.
2. Розрахувати абсолютну випадкову, абсолютну систематичну, повну абсолютну та повну відносну похибки визначення швидкості. Записати довірчий інтервал для швидкості кулі. Пояснити можливі причини виникнення похибки визначення швидкості кулі.
3. Перевірити маятник на балістичність. Як сказано вище, маятник можна вважати балістичним, якщо час зіткнення кулі з ним є набагато меншим, ніж період коливань маятника: $\tau \ll T$. Час зіткнення τ оцінити за формулою $\tau \approx h/\upsilon_n$, де h – величина заглиблення кулі в пластилін, $\upsilon_n = \upsilon/2$ – середня швидкість руху кулі в пластиліні. Порівняти час зіткнення τ з періодами T_1 і T_2. Маятник можна вважати балістичним якщо τ є меншим ніж T більш ніж на 1 порядок.

Теоретичні завдання

1. Пояснити ідею балістичного методу визначення швидкості польоту тіл.
2. Дати означення моменту імпульсу частинки та системи частинок. Дати визначення моменту імпульсу абсолютно твердого тіла, що здійснює обертальний рух. Сформулювати умови зміни та збереження моменту імпульсу частинки і системи частинок.
3. Дати означення внутрішніх та зовнішніх сил для системи частинок.
4. Дати означення механічної енергії частинки та системи частинок. Дати означення механічної енергії абсолютно твердого тіла, що здійснює обертальний рух. Сформулювати умови зміни та збереження механічної енергії частинки і системи частинок.
5. Дати означення консервативних (потенціальних) та неконсервативних (непотенціальних) сил.
6. Що таке дисипативні сили? До яких сил (консервативних чи неконсервативних) вони належать? Як і чому робота дисипативних сил впливає на механічну енергію частинки/системи частинок?
7. Дати означення пружного, непружного та абсолютно непружного зіткнення (удару).
8. Пояснити, які перетворення енергії відбуваються в ході експерименту.
9. Дати означення коливного процесу (коливання). Пояснити, що таке гармонічні коливання. Пояснити, за якої умови коливання будуть гармонічними.
10. Записати рівняння гармонічних коливань (рівняння гармонічного осцилятора) та його розв'язок. Пояснити, що таке амплітуда, частота, період та фаза коливань.
11. Використовуючи закони збереження моменту імпульсу та енергії, отримати робочу формулу для визначення швидкості кулі.
12. Проаналізувати експериментальну залежність кута максимального відхилення маятника від положення рівноваги φ_m від моменту інерції маятника I, який змінюється зі зміною положення тягарців. Пояснити теоретично цю залежність, використовуючи закони збереження.
13. Проаналізувати експериментальну залежність періоду коливань маятника T від моменту інерції маятника I, який змінюється зі зміною положення тягарців. Пояснити теоретично цю залежність, використовуючи закони збереження.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
2. И. Е. Иродов, «Основные законы механики» // Москва, Высшая школа, 1985
   або И. Е. Иродов, «Механика. Основные законы» // Москва–Санкт-Петербург, Физматлит, 2001.
3. С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо, «Практикум по физике. Механика» // Москва, 1990.
4. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Механика» // Москва, Наука, 1979 – 1993.
5. А. Н. Матвеев, «Механика и теория относительности» // Москва, Высшая школа, 1986.

РОБОТА № 8

МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Мета роботи:

1. Дослідити динаміку плоского руху твердого тіла на прикладі маятника Максвела.
2. Обчислити та експериментально визначити момент інерції маятника.

Опис експериментальної установки

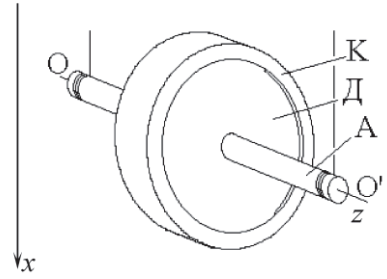


Рис.8.1. Схема маятника Максвелла

Маятник Максвелла є твердим тілом, що складається з однорідного металевого стержня А, на якому закріплено однорідний диск Д (рис.8.1). На диск можуть накладатись змінні кільця К. До кінців стержня прикріплені дві капронові нитки однакової довжини, які щільно намотуються на стержень А (від кінців стержня до його центру). При звільненні маятника у верхній точці він починає рухатись вниз (нитки розмотуються), обертаючись навколо горизонтальної осі OO', що проходить через центр мас С і є віссю симетрії маятника. У нижній точці траєкторії маятника за інерцією обертального руху нитки починають намотуватись в протилежному відносно стержня напрямку, і маятник підіймається, майже досягаючи верхнього початкового положення, зупиняється, і знову рухається вниз. Ці квазіперіодичні

коливання (вгору-вниз) будуть згасаючими внаслідок дії на маятник дисипативних сил опору, зокрема опору повітря.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Умови зміни та збереження імпульсу та моменту імпульсу системи частинок. Рівняння руху абсолютно твердого тіла

При русі вільної частинки з масою m зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ існують певні величини, які є функціями змінних, що визначають механічний стан системи, і при цьому залишаються незмінними (тобто зберігаються) в процесі її руху. Цими величинами є: векторна величина $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – ***імпульс*** частинки, векторна величина $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = m[\vec{r} \times \vec{\upsilon}]$ – ***момент імпульсу*** частинки та скалярна величина $T = \frac{m\upsilon^2}{2}$ – ***кінетична енергія*** частинки. Надалі нас будуть цікавити величини $\vec{p}$ та $\vec{L}$. Для знаходження умов зміни з часом та збереження цих величин необхідно дослідити їх похідні за часом.

Похідна від імпульсу за часом є:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}, \qquad (8.1)$$

де $\vec{F}$ – сума сил, прикладених до частинки. Отже, ***імпульс частинки змінюється під дією прикладеної до неї сили***, причому елементарний приріст імпульсу $d\vec{p}$ співпадає з напрямом цієї сили, а його величина пропорційна величині сили та проміжку часу, протягом якого цей приріст імпульсу виникає. Із рівняння (8.1) випливає ***умова збереження імпульсу частинки: імпульс частинки зберігається, якщо сума всіх сил, прикладених до частинки, дорівнює нулю.*** Варто зазначити, що імпульс вільної частинки зберігається без будь-яких умов, оскільки за означенням на вільну частинку не діють ніякі сили.

Для моменту імпульсу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left([\vec{r} \times \vec{p}]\right) = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon}] + [\vec{r} \times \vec{F}]. \qquad (8.2)$$

Доданок $[\vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon}] = 0$ внаслідок колінеарності співмножників, а $[\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$ є ***моментом сили*** $\vec{F}$. Отже, момент імпульсу частинки змінюється під дією суми моментів прикладених до неї сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad (8.3)$$

причому елементарний приріст вектора моменту імпульсу частинки $d\vec{L}$ співпадає за напрямом з напрямом вектора моменту сили, а його величина пропорційна величині моменту цієї сили та проміжку часу, протягом якого цей приріст моменту імпульсу виникає. Рівняння (8.3) називають ***рівнянням моментів***. *Отже,* ***умова збереження моменту імпульсу частинки: момент імпульсу частинки зберігається, якщо сумарний момент усіх сил, прикладених до частинки, дорівнює нулю.*** Так само як і імпульс, момент імпульсу вільної частинки зберігається без будь-яких умов, оскільки за означенням на вільну частинку не діють ніякі сили, а отже сумарний момент сил завжди дорівнює нулю.

Абсолютно тверде тіло можна означити як систему частинок, відстані між якими не змінюються в процесі руху цієї системи. Таким чином, якщо при русі твердого тіла у ньому відсутні деформації, то це тіло є абсолютно твердим. Зрозуміло, що реальне тверде тіло можна вважати абсолютно твердим, якщо при його русі абсолютна величина деформацій тіла є набагато меншою ніж його розміри. Зауважимо, що в даній лабораторній роботі маятник Максвелла добре описується моделлю абсолютно твердого тіла. Умови зміни та збереження імпульсу та моменту імпульсу системи частинок будемо шукати так само як і для однієї частинки. Візьмемо похідну за часом від імпульсу системи частинок $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ і, враховуючи другий закон Ньютона для кожної частинки, отримаємо:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\equiv\vec{F}\,. \qquad (8.4)$$

У загальному випадку i-та частинка системи може взаємодіяти як з іншими частинками системи, так і з матеріальними об'єктами, що не належать до системи частинок. Тоді, сили, прикладені до частинок системи, можна поділити на ***внутрішні*** (сили взаємодії між частинками самої системи) та ***зовнішні*** (сили взаємодії частинок системи з матеріальними об'єктами, що не належать до системи:

$$\vec{F}_i=\vec{F}_i^{\,вн}+\vec{F}_i^{\,зовн},\ \text{де}\ \ \vec{F}_i^{\,вн}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\vec{F}_{ik}\,. \qquad (8.5)$$

Отже, рівняння (8.4) матиме вигляд:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}^{\,вн}+\vec{F}^{\,зовн},\ \text{де}\ \ \vec{F}^{\,вн}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,вн}\ \ \text{та}\ \ \vec{F}^{\,зовн}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,зовн}\,. \qquad (8.6)$$

Виходячи з третього закону Ньютона, можна показати, що сума всіх сил взаємодії між частинками $\vec{F}^{\,вн}$ завжди дорівнює нулю. Враховуючи це, отримуємо умови зміни та збереження імпульсу системи частинок:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}^{\,зовн}, \qquad (8.7)$$

тобто ***імпульс системи частинок змінюється, якщо сума зовнішніх сил, прикладених до частинок системи відмінна від нуля; імпульс системи частинок зберігається (залишається сталим), якщо сума зовнішніх сил, прикладених до частинок системи дорівнює нулю.*** Слід зауважити, що якщо відсутня взаємодія частинок системи з матеріальними об'єктами, що не належать до цієї системи, то таку систему частинок називають **замкненою**. Імпульс замкненої системи частинок є величина стала.

Якщо ввести поняття ***центра мас*** або ***центра інерції*** системи частинок з радіус-вектором $\vec{R}_C$ та швидкістю $\vec{V}_C$

$$\vec{R}_C=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i(t)\,,\quad \vec{V}_C=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i\,, \qquad (8.8)$$

де $m=\sum_{i=1}^{n}m_i$ – повна маса системи частинок, а $\vec{r}_i(t)$ – радіус-вектор, що задає положення *i*-ї частинки, то тоді вираз для імпульсу системи частинок можна подати у вигляді

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i=m\dot{\vec{R}}_C=m\vec{V}_C\,. \qquad (8.9)$$

Тоді з урахуванням (8.9) рівняння (8.7) матиме вигляд:

$$m\frac{d\vec{V}_C}{dt}=\vec{F}^{\,зовн}\,. \qquad (8.10)$$

Важливим при аналізі руху системи частинок є поняття системи центру мас або Ц-системи. ***Системою центру мас називається система відліку, початок відліку якої знаходиться у центрі мас системи частинок, тобто Ц-система – це система відліку, в якій система частинок як ціле знаходиться в спокої.*** Зрозуміло, що довільний рух системи частинок можна представити як її рух відносно Ц-системи (відносний рух частинок) та рух системи частинок як цілого (рух Ц-системи). У свою чергу з рівняння (8.10) видно, що рух системи частинок як цілого (поступальний рух) можна представити як рух точкового тіла (центра мас) з масою m та швидкістю $\vec{V}_C$. Зауважимо, що поступальним рухом твердого тіла є такий рух, при якому будь-яка пряма, пов'язана з цим тілом, залишається паралельною своєму початковому напрямку; такий рух може бути описаний як рух однієї його точки: траєкторії всіх точок твердого тіла можуть бути отримані паралельним зсувом траєкторії однієї з них. Оскільки тверде тіло є частинним випадком системи частинок, то звідси випливає, що аналіз поступального руху твердого тіла зводиться до аналізу руху його центра мас, який описується рівнянням (8.10). Таким чином ***рівняння (8.10) – це рівняння поступального руху системи частинок (твердого тіла).***

Аналогічно для моменту імпульсу системи частинок $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$ можна отримати:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{вн} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{зовн}. \qquad (8.11)$$

Аналогічно тому, як це було зроблено вище для внутрішніх сил системи частинок, можна показати, що якщо між частинками системи діють лише центральні сили, то їх сумарний момент завжди дорівнює нулю ($\vec{M}^{вн} = 0$). Враховуючи це, отримуємо умови зміни та збереження моменту імпульсу системи частинок:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{зовн}, \qquad (8.12)$$

тобто ***момент імпульсу системи частинок змінюється, якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, відмінний від нуля; момент імпульсу системи частинок зберігається, якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, дорівнює нулю.*** Момент імпульсу замкненої системи частинок є величина стала.

Для системи центра мас рівняння (8.12) має вигляд:

$$\frac{d\tilde{\vec{L}}}{dt} = \tilde{\vec{M}}_C^{зовн}, \qquad (8.13)$$

де $\tilde{\vec{L}}$ – власний момент імпульсу системи частинок (момент імпульсу, визначений відносно довільної точки, нерухомої відносно Ц-системи, наприклад – відносно центру мас), $\tilde{\vec{M}}_C^{зовн}$ – результуючий момент зовнішніх сил відносно центру мас. ***У випадку твердого тіла рівняння моментів (8.13) є рівнянням його обертального руху.***

Зв'язок між лінійними та кутовими кінематичними величинами при обертальному русі

З'ясуємо зв'язок між лінійними та кутовими характеристиками обертального руху. З геометричних міркувань легко побачити, що

існує простий лінійний зв'язок між модулем приросту радіус-вектора матеріальної точки при її русі по колу та кутом повороту радіус-вектора (рис.8.2):

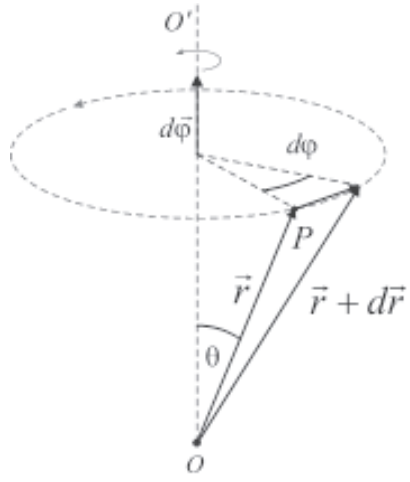


Рис. 8.2. Кут нескінченно малого повороту.

$$|d\vec{r}| = d\varphi \cdot r \sin\theta, \text{ або } d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]. \qquad (8.14)$$

Диференціюючи цей вираз по часу, отримаємо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}\right] \text{ або } \vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \qquad (8.15)$$

У свою чергу, диференціюючи вираз (8.15) по часу, отримаємо:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] =$$

$$= [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}] = [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]. \qquad (8.16)$$

Перший доданок являє собою тангенціальну складову прискорення точки твердого тіла, а другий доданок його нормальну складову.

Тензор інерції твердого тіла. Момент інерції твердого тіла відносно осі обертання

Для обертального руху рівняння (8.12) (та, відповідно, (8.13)) можна записати через вектор кутового прискорення. Для цього визначимо зв'язок між векторами моменту імпульсу $\vec{L}$ та кутової швидкості $\vec{\omega}$. Якщо уявно розбити тверде тіло на сукупність малих елементів, які можна вважати матеріальними точками, з масами Δm_i та радіус-векторами $\vec{r}_i$, то момент імпульсу тіла можна записати як

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \times (\Delta m_i \vec{\upsilon}_i)] = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [\vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i]. \qquad (8.17)$$

При обертальному русі лінійна та кутова швидкості матеріальної точки зв'язані співвідношенням (8.15) $\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$, звідки, використовуючи відому формулу $[\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, отримаємо:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]] = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]. \qquad (8.18)$$

Оскільки у твердому тілі маса розподілена неперервно, від сумування по Δm_i у (8.18) можна перейти до інтегрування по всьому об'єму абсолютно твердого тіла. Відповідно вираз для проекції вектора моменту імпульсу на вісь α деякої декартової системи координат набуде вигляду:

$$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \int_V \rho (r^2 \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta) \omega_\beta dV, \qquad (8.19)$$

де $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \alpha=\beta; \\ 0, \text{ якщо } \alpha \neq \beta \end{cases}$ – символ Кронекера, а $\alpha, \beta = x, y, z$.

Введемо позначення

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \rho (r^2 \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta) dV. \qquad (8.20)$$

Об'єкт, що являє собою сукупність 9-ти чисел, які визначаються виразом (8.20), називається ***тензором інерції абсолютно твердого тіла***. Таким чином, вираз для проекцій моменту імпульсу абсолютно твердого тіла можна записати у вигляді:

$$L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta} \omega_\beta \quad \text{або} \quad \vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}, \qquad (8.21)$$

де $\hat{I}$ – тензор інерції. Даний вираз є дуже важливим для динаміки твердого тіла, оскільки, по-перше, кутова швидкість, з якою обертається тверде тіло, в кожний момент часу не залежить від вибору осі обертання, що дає підставу ***вважати величину $\vec{\omega}$ єдиною (абсолютною) характеристикою обертального руху твердого тіла*** і називати її кутовою швидкістю обертання твердого тіла як такого, не вказуючи точку, до якої вона віднесена; по-друге, запис виразу для тензора інерції є дуже зручним, оскільки він не потребує вказівки на ту чи іншу систему координат. Відповідним одночасним вибором орієнтації всіх трьох осей системи координат можна всі недіагональні компоненти тензора інерції перетворити на нуль, тобто тензор інерції набуде діагонального вигляду. Тоді така система координат буде ***головною*** або ***власною*** системою координат цього тензора.

$$\hat{I} = [I_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}. \qquad (8.22)$$

Величини $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ називаються ***головними моментами інерції*** абсолютно твердого тіла. Вони визначають інерційні властивості абсолютно твердого тіла щодо обертання навколо осей, що співпадають з головними осями тензора інерції. Дійсно, в головній системі координат тензора інерції система рівнянь (8.21) набуде вигляду:

$$L_\alpha = I_\alpha \omega_\alpha. \qquad (8.23)$$

Тоді ***основне рівняння динаміки обертального руху (8.13)*** (***рівняння моментів***), записане в проекціях на осі головної системи координат, матиме вигляд:

$$I_\alpha \frac{d\omega_\alpha}{dt} = M_\alpha^{зовн}, \text{ або } I_\alpha \beta_\alpha = M_\alpha^{зовн}, \qquad (8.24)$$

де β_α – кутове прискорення обертального руху.

Аналіз руху маятника Максвела

Плоским рухом твердого тіла називається рух, при якому всі точки твердого тіла рухаються в паралельних площинах. При плоскому русі вектор швидкості поступального руху тіла є перпендикулярним до вектора його кутової швидкості. Рух маятника Максвелла може бути розкладений на обертання навколо горизонтальної осі OO', що проходить через його центр мас, та поступальний рух по вертикалі (вздовж осі X) точки центру мас (див. рис. 8.1). Оскільки ці осі є перпендикулярними, то звідси випливає, що рух маятника Максвелла є плоским.

Запишемо систему рівнянь руху маятника Максвела. Рух маятника не є вільним, оскільки на його рух впливає зв'язок, зумовлений ниткою, намотаною на вісь-стержень. Тому до цих рівнянь необхідно також додати рівняння зв'язку. Оскільки за відсутності проковзування нитки відносно стержня тангенціальна складова прискорення точки на поверхні стержня $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \times \vec{r}]$ (див. рівняння (8.16)) дорівнює прискоренню центра мас маятника (лінійному прискоренню маятника), то рівняння зв'язку матиме вигляд:

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}]\,. \qquad (8.25).$$

Нарешті запишемо систему рівнянь руху маятника Максвела разом з рівнянням зв'язку:

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}^{\,зовн}; \\ I\vec{\beta} = \vec{M}^{\,зовн};\,. \\ \vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}]. \end{cases} \qquad (8.26)$$

Зовнішні сили, що діють на маятник – сила тяжіння $m\vec{g}$, направлена вниз, та пара сил натягу нитки $\vec{T}$, направлених вгору (сили тертя не враховуються). Тому систему векторних рівнянь (8.26) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} m\vec{a} = m\vec{g} + 2\vec{T}; \\ I\vec{\beta} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_{2T}; \\ \vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}]. \end{cases} \qquad (8.27)$$

Ненульовий момент сили відносно власної осі OO' мають лише сили $\vec{T}$ з плечем, що дорівнює радіусу r_c стержня (радіус намотки ниток). Момент сили тяжіння відносно осі OO' рівний нулю, оскільки точка її прикладення лежить на цій осі. Спроектуємо рівняння поступального руху та рівняння зв'язку на вісь x, що направлена вертикально вниз, а рівняння обертального руху (8.24) – на горизонтальну вісь OO' (вісь z). Враховуючи, що $a_x = a$ та $\beta_z = \beta$, отримаємо

$$\begin{cases} ma = mg - 2T; \\ I\beta = 2Tr_c; \\ a = \beta r_c. \end{cases} \qquad (8.28)$$

Розв'язуючи систему (8.28), знайдемо:

$$a = g\frac{mr_c^2}{I + mr_c^2}\,. \qquad (8.29)$$

З (8.29) видно, що поступальний рух центру мас маятника Максвелла є рівноприскореним (a=const). Експериментально вимірюють час "падіння" τ маятника з висоти $h = a\tau^2/2$, тоді з (8.29) отримаємо формулу для експериментального визначення моменту інерції маятника:

$$\frac{2h}{\tau^2} = g\frac{mr_c^2}{I + mr_c^2}\,, \quad \tau^2 = \frac{2h}{g}\frac{I + mr_c^2}{mr_c^2}\,, \quad I = mr_c^2\left(\frac{g\tau^2}{2h} - 1\right). \qquad (8.30)$$

Розрахунок моменту інерції маятника Максвела

Отримаємо аналітичний вираз для теоретичного розрахунку моменту інерції маятника, який є сумою моментів інерції його складових частин (стержня, диска та кільця). Вираз для момента інерції кільця отримаємо, користуючись рівнянням (8.20). Момент

інерції циліндричного тіла (циліндра, диска, стержня, кільця) відносно власної осі, що співпадає з віссю z маятника, дорівнює компоненту тензора інерції I_{zz}:

$$I_{zz} = \int_V \rho(r^2\delta_{zz} - r_z r_z)dV = \int_V \rho(r^2 - z^2)dV = \int_V \rho(x^2 + y^2)dV =$$

$$= \int_V \rho r_\perp^2 dV = \int_V r_\perp^2 dm, \qquad (8.31)$$

де $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ – відстань від даної точки (елемент об'єму) до осі обертання OO'. Для циліндричних тіл елементарний об'єм дорівнює $dV = rdrd\varphi dz$. У результаті для циліндричного тіла довжиною l, зовнішнім радіусом $r_з$ та внутрішнім осьовим круглим отвором радіусом $r_в$ отримаємо:

$$I_{zz} = \int_V \rho r_\perp^2 dV = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz \int_{r_в}^{r_з} r_\perp^3 dr_\perp = 2\pi l\rho \frac{r^4}{4}\Big|_{r_в}^{r_з} = \frac{1}{2}\pi l\rho\left(r_з^4 - r_в^4\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi l\rho\left(r_з^4 - r_в^4\right) = \frac{1}{2}\pi l\rho\left(r_з^2 - r_в^2\right)\left(r_з^2 + r_в^2\right) = \frac{1}{2}m\left(r_в^2 + r_з^2\right), \qquad (8.32)$$

де m – маса тіла.

Таким чином, моменти інерції складових частин маятника Максвела відносно осі симетрії розраховуються за такими формулами. Момент інерції кільця:

$$I_к = \frac{1}{2}m_к\left(r_{к1}^2 + r_{к2}^2\right), \qquad (8.33)$$

де $m_к$ – маса кільця, $r_{к1}$ і $r_{к2}$ – його внутрішній і зовнішній радіуси відповідно. Момент інерції диска:

$$I_д = \frac{1}{2}m_д\left(r_c^2 + r_{к1}^2\right), \qquad (8.34)$$

де $m_д$ – маса диска, r_c – радіус стержня. Момент інерції стержня:

$$I_c = \frac{1}{2}m_c r_c^2, \qquad (8.35)$$

де m_c – маса стержня. Нарешті, момент інерції маятника з кільцем дорівнює сумі моментів інерції його складових частин:

$$I = I_к + I_д + I_c. \qquad (8.36)$$

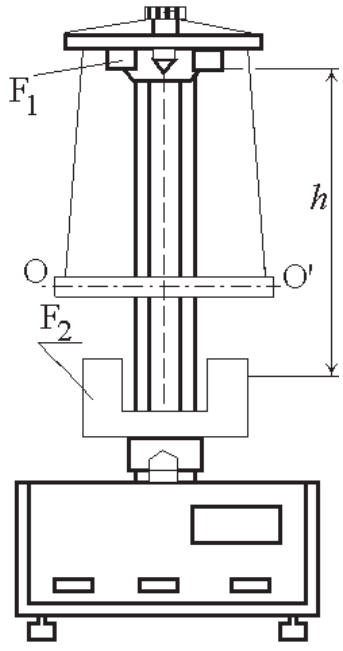


Рис.8.3. Загальна схема експериментальної установки

ВИМІРЮВАННЯ

У даній роботі вимірюють час падіння τ_i маятника з набором кілець і за допомогою рівняння (8.30), вимірявши радіус намотки нитки r_c, експериментально визначають момент інерції I. Результат порівнюють з теоретичним розрахунком I маятника, що складається зі стержня А, диска Д з отвором і кільця К (рис.8.1), використовуючи формули (8.33) – (8.36).

Провести такі вимірювання.

1. Увімкнути тумблер «Сеть».
2. Встановити однакову довжину ниток за допомогою регулюючих гвинтів.

3. Виміряти висоту падіння h, як відстань між нижнім краєм маятника в верхньому початковому положенні і рискою на блоці фотоелемента внизу штатива.
4. На основу маятника, що складається зі стержня А та диска Д, надіти кільце К.
5. Рівномірно та щільно намотавши нитки, зафіксувати маятник у верхньому положенні за допомогою електромагніту (кнопка «Пуск» не натиснута).
6. Натиснути кнопку «Пуск», при цьому фіксатор верхнього положення вимикається і спрацьовує фотоелектрична система F_1 (рис.8.3) включення електронного секундоміра.
7. В нижньому положенні край диска з кільцем К перекриває світловий пучок фотоелемента F_2 і секундомір зупиняється, а на табло реєструється значення часу падіння.
8. Занотувавши значення часу, натиснути клавішу «Сброс».
9. Виміри виконати не менше 10 разів для даної висоти h і кожного кільця.

Експериментальні завдання

1. Використовуючи виміряні висоту та часи падіння маятника Максвела з трьома різними кільцями за допомогою формули (8.30) розрахувати експериментальні значення моментів інерції маятника з кільцями.
2. Теоретично розрахувати моменти інерції маятника з кільцями, використовуючи вирази (8.33) – (8.36).
3. Порівняти експериментальні значення I з відповідними теоретичними значеннями, розрахувавши їх абсолютне та відносне відхилення як $\Delta I = I_{експ} - I_{теор}$ та $\varepsilon_I = \left(\Delta I / I_{експ}\right)\cdot 100\%$ відповідно.
4. Обчислити абсолютну похибку непрямих вимірів моментів інерції ΔI. При цьому систематична похибка визначення висоти береться рівною $\Delta h \approx 4$ мм як такої, що складається з похибки $\Delta h_1 \approx 1$ мм вертикальної лінійної шкали і похибки спрацювання фотоелектричної системи $\Delta h_2 \approx 3$ мм.

5. Перевірити, чи знаходяться теоретично розраховані значення I у межах відповідних довірчих інтервалів. На основі цього зробити висновок про коректність використання системи динамічних рівнянь (8.27) – (8.28) для опису руху маятника Максвела.

Теоретичні завдання

1. Дати означення понять «поступальний рух», «обертальний рух відносно нерухомої осі», «плоский рух» та «миттєва вісь обертання».
2. Дати означення кута нескінченно малого повороту, кутової швидкості та кутового прискорення.
3. Дати означення імпульсу, моменту імпульсу та моменту сили.
4. Записати та сформулювати основні закони динаміки твердого тіла.
5. Вивести формулу (8.30) для експериментального визначення моменту інерції маятника Максвела.
6. Дати означення тензора інерції та головних моментів інерції абсолютно твердого тіла. В яких одиницях вимірюється момент інерції?
7. Отримати аналітичний вираз для моменту інерції: кільця та циліндра (стержня) відомої маси та розмірів відносно осі симетрії та відносно осі, що проходить через його центр мас і перпендикулярна до осі симетрії; кулі з відомою масою та радіусом відносно осі, що проходить через її центр.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
2. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Т.1. Механика» // Москва, Наука, 1989.
3. С. П. Стрелков, «Общий курс физики. Механика» // Москва, Наука, 1975.

РОБОТА № 9

ПОХИЛИЙ МАЯТНИК

Мета роботи

1. Експериментально вивчити дисипативну силу, що виникає при коченні кулі по плоскій поверхні без проковзування.
2. Визначити коефіцієнт тертя кочення за допомогою похилого маятника.

Опис експериментальної установки

Прилад для вимірювання коефіцієнта тертя кочення складається з похилої площини, нахил якої β можна змінювати в широких межах, та підвішеної на довгій тонкій нитці кулі, що може котитися по металевій пластині, що знаходиться на похилій площині. Якщо кулю відвести від положення рівноваги і відпустити, вона почне коливатися, котячись без проковзування біля положення рівноваги. Принцип дії приладу заснований на вимірюванні зміни амплітуди (кута відхилення) згасаючих коливань похилого маятника: чим більшою є різниця між початковою α та кінцевою $\alpha - \Delta\alpha$ амплітудами коливань при заданій кількості коливань, тим більшою є сила тертя кочення між кулею і похилою площиною.

Лабораторна установка представлена на рис. 9.1. На основі 2, що має чотири ніжки, висота яких може регулюватися, закріплена труба 3, на якій змонтовано корпус 4 з черв'ячною передачею. Черв'ячна передача з'єднана з кронштейном 5. На кронштейні закріплено шкалу 6, по якій робиться відлік кута відхилення маятника від положення рівноваги α і шкалу 7, на якій встановлюється кут нахилу зразка β. У кронштейні закріплена колонка 8, до якої на нитці підвішена куля з голкою 9. У кронштейн можуть вставлятися різні зразки металевих пластин 10. Для зміни кута нахилу зразка використовується ручка 11. До кронштейна 5 прикріплено фотоелектричний датчик 12, приєднаний до секундоміра 1.

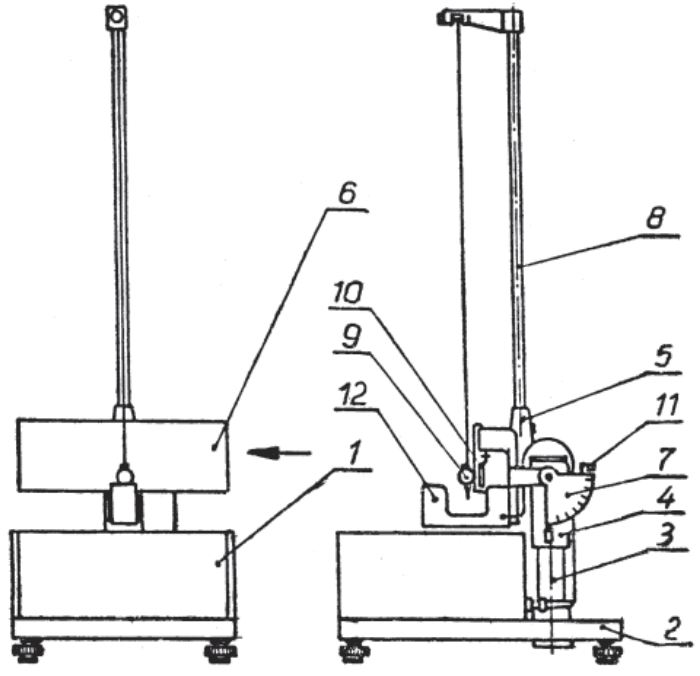


Рис. 9.1 Схема експериментальної установки

Теоретичні відомості

На будь-яке тіло, що рухається в деякому матеріальному середовищі, діють сили опору. Природа цих сил може бути різною, але в результаті виконання такими силами роботи завжди відбувається перетворення механічної енергії тіла у внутрішню енергію тіл, що знаходяться в контакті. Розрізняють сухе (або зовнішнє) тертя між твердими тілами і в'язке (або внутрішнє) тертя між шарами рідини чи газу. Силами зовнішнього тертя називають сили, що виникають на границі двох твердих тіл у місці їх контакту при відносному русі цих тіл. Ці сили протидіють відносному руху тіл.

Робота і енергія

Якщо на тіло, що рухається, діє сила $\vec{F}$, яка утворює кут α з напрямком елементарного переміщення $d\vec{r}$, то ***елементарна робота цієї сили*** дорівнює

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha\,. \qquad (9.1)$$

Робота сили з переміщення тіла з точки простору 1 в точку простору 2 визначається таким інтегралом

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_{dr} dr\,, \qquad (9.2)$$

де F_{dr} – проекція сили на напрям переміщення.

Потенціальна енергія – різновид механічної енергії системи тіл, яку тіла мають внаслідок їх взаємодії. Потенціальна енергія визначається взаємним розташуванням тіл і характером сил взаємодії між ними. Взаємодія між тілами відбувається через посередництво силових полів. Якщо робота при переміщенні тіла з одного положення в інше не залежить від траєкторії, а залежить тільки від початкового та кінцевого положень тіла, то такі поля називають ***потенціальними***, а сили, що діють з боку таких полів – ***консервативними***. Прикладом консервативних сил є сила гравітації (зокрема сила земного тяжіння), сила електростатичної взаємодії між точковими нерухомими зарядами, сила пружності. Якщо робота сили залежить від траєкторії, то така сила називається ***неконсервативною.*** Одним з різновидів неконсервативних сил є дисипативні сили, робота яких завжди від'ємна. Сили тертя є дисипативними силами.

Лише для консервативних сил роботу при елементарному переміщенні можна представити у вигляді елементарного приросту деякої функції, яка є функцією просторового положення тіла (функцією координат): $\delta A = -dU$. Ця функція U і є ***потенціальною енергією тіла у полі сили.*** Оскільки робота сили дорівнює приросту потенціальної енергії ($A = -\Delta U$), то функція U визначається з точністю до адитивної константи. Тому

потенціальній енергії можна приписати нульове значення у довільній точці простору виходячи з міркувань зручності.

Зокрема, якщо тіло знаходиться в однорідному полі тяжіння на висоті h над поверхнею Землі, то приріст його потенціальної енергії дорівнюватиме

$$\Delta U = -A = -\int \delta A = -\int_0^h \left(-mg\right) dy = mgh\,, \qquad (9.3)$$

де вісь y направлена вертикально вгору. Тепер вибираючи значення потенціальної енергії на поверхні Землі рівним нулю, отримаємо: $\Delta U = U = mgh$ – потенціальна енергія тіла в однорідному полі тяжіння.

Механічні коливання

Коливаннями називають процеси (рухи або зміни стану), які повторюються в часі. Розглянемо рух матеріальної точки, положення якої в просторі ми позначимо через x. Нехай на неї діє ***квазіпружна сила***, тобто сила, модуль якої пропорційний величині зміщення з положення рівноваги, а напрямок є протилежним напрямку зміщення: $\vec{F} = -k\vec{x}$. Якщо змістити тіло з положення рівноваги на величину a, то під дією цієї сили тіло буде рухатися до положення рівноваги. Пройшовши положення рівноваги, тіло зупиниться в положенні $x = -a$, якщо сили тертя відсутні. Запишемо для тіла рівняння 2-го закону Ньютона: $ma_x = -kx \;\Rightarrow\; m\ddot{x} = -kx$, звідки отримаємо так зване ***рівняння гармонічного осцилятора***

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \qquad (9.4)$$

де введено позначення $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. ***Гармонічний осцилятор*** здійснює коливання, що описуються гармонічними функціями (синусом або косинусом)

$$x(t) = a\cos\left(\omega_0 t + \alpha\right), \qquad (9.5)$$

де a – амплітуда коливань, ω_0 – циклічна частота, $\omega_0 t + \alpha$ – фаза і α – початкова фаза. Легко пересвідчитись, що функція (9.5) є

розв'язком рівняння (9.4), тобто дійсно рівняння (9.4) описує гармонічні коливання. Рівняння (9.4) є рівнянням руху тіла за відсутності дисипативних сил (сил тертя). З формули (9.5) видно, що оскільки при цьому у системі відсутня дисипація (зменшення) механічної енергії, то коливання будуть відбуватися з ***незмінною амплітудою*** a, тобто вони будуть ***незгасаючими***.

Слід, проте, зауважити, що в реальних коливних системах завжди існують дисипативні сили (сили тертя, опору і т.д.). За умови руху тіла з невеликою швидкістю сила з боку оточення може бути виражена як

$$\vec{F}_{on} = -r\vec{\upsilon}, \tag{9.6}$$

де r – коефіцієнт тертя. Тоді рівняння руху цього тіла у проекції на вісь x, направлену в напрямку руху, набуде вигляду

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \tag{9.7}$$

Позначаючи $2\beta = \frac{r}{m}$ і $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, отримаємо:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{9.8}$$

Рівняння (9.8) описує згасаючі коливання. Розв'язком цього рівняння буде функція

$$x = ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{9.9}$$

де при $\omega_0^2 > \beta^2$: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота згасаючих коливань. Амплітуда загасаючих коливань зменшується з часом за експоненційним законом $A = ae^{-\beta t}$, де a – початкова амплітуда. Час релаксації τ – час, за який амплітуда коливань зменшується в e разів: $\tau = 1/\beta$. Строго кажучи, для згасаючих коливань поняття періоду T та частоти ω застосовувати не можна. Однак, якщо згасання мале, то умовно можна користуватися поняттям періоду, як проміжку часу між двома сусідніми максимумами (мінімумами) функції $x(t)$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{9.10}$$

Момент сили

Моментом сили відносно деякої точки O називають векторний добуток радіус-вектора, що задає положення точки прикладення сили, на силу:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right], \tag{9.11}$$

де $\vec{M}$ – момент сили, $\vec{r}$ – радіус-вектор, $\vec{F}$ – сила. Модуль моменту сили визначається за формулою

$$M = F \cdot r \cdot \sin\widehat{\vec{F}\vec{r}}, \tag{9.12}$$

де $\widehat{\vec{F}\vec{r}}$ – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$, величина $l = r \cdot \sin\widehat{\vec{F}\vec{r}}$, що дорівнює відстані від точки O до лінії дії, називається ***плечем сили***.

Тертя спокою і тертя ковзання

Сила, яка перешкоджає початку руху тіла, називається ***силою тертя спокою***. Сила тертя спокою $\vec{F}_c$ дорівнює за модулем та протилежна за напрямком силі $\vec{F}$, яка діє на тіло паралельно до поверхні дотику (рис 9.2).

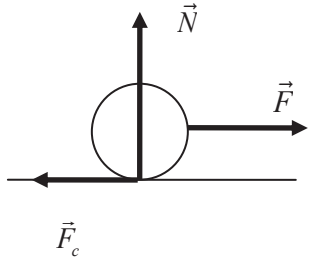


Рис. 9.2 Напрям сили тертя спокою

Тертя спокою існує за умови, що тіла, що дотикаються, знаходяться у відносному спокої. Сила тертя спокою збільшується зі зростанням зовнішньої сили. Максимальне за модулем значення сила тертя спокою має безпосередньо перед моментом початку руху тіла, тобто коли тіло починає ковзати:

$$F_c \le \mu_c N, \tag{9.13}$$

де μ_c – безрозмірний коефіцієнт тертя спокою, що визначається механічними властивостями матеріалів і стану поверхні тіл, що дотикаються, N – нормальна складова сили реакції опори (сила нормальної реакції опори).

При коченні тіла по поверхні саме сила тертя спокою відповідає за обертання тіла. В цьому легко впевнитися, розглядаючи моменти сил відносно центру мас тіла на рис. 9.2. Моменти сил $\vec{F}$ і $\vec{N}$ дорівнюють нулю, а момент сили $\vec{F}_c$, направлений перпендикулярно до площини рисунка, змушує тіло обертатися у напрямку годинникової стрілки і котитися праворуч.

Сила тертя, що виникає при ковзанні одного тіла відносно другого, називається ***силою тертя ковзання***. Сила тертя ковзання, що виникає при ковзанні сухих поверхонь тіл одне відносно одного, в основному викликана зчепленням між нерівностями поверхонь тіл у місці їх контакту. У наближених розрахунках, при невеликих відносних швидкостях руху тіл, вважають, що величина сили тертя є прямо пропорційною величині сили нормальної реакції опори та направлена протилежно відносній швидкості руху тіл:

$$\vec{F}_{ковз} = -\mu_{ковз} N \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}, \qquad (9.14)$$

де $\mu_{ковз}$ – безрозмірний коефіцієнт тертя ковзання, що також визначається механічними властивостями матеріалів і стану поверхні тіл, що ковзають.

«Тертя кочення»

Розглянемо циліндр радіусом R, що котиться без проковзування по горизонтальній площині. Кочення без проковзування означає, що модуль лінійної миттєвої швидкості центра мас циліндра υ в будь-який момент часу зв'язаний з модулем кутової швидкості обертання циліндра ω співвідношенням $\upsilon = R\omega$.

Для подолання дисипативної сили, яку, за аналогією, назвемо силою тертя кочення $\vec{F}_{коч}$ і підтримки рівномірного руху тіла, необхідно прикласти до циліндра силу $\vec{F}$. За 3-м законом Ньютона: $\vec{F}_{коч} = -\vec{F}$. Сила $\vec{F}_{коч}$ створює момент $\vec{M}_{коч}$. Модуль цього моменту відносно власної осі обертання циліндра дорівнює

$$M_{коч} = RF_{коч} = RF. \qquad (9.15)$$

При невеликих швидкостях обертання модуль моменту $M_{коч}$, є прямо пропорційним до модуля сили, що притискає тіло до поверхні, який, в свою чергу, за 3-м законом Ньютона дорівнює модулю сили нормальної реакції опори. Коефіцієнтом цієї пропорційності є коефіцієнт, який, за аналогією, назвемо коефіцієнтом тертя кочення. ***Коефіцієнт тертя кочення*** μ визначається як відношення величин моменту сили тертя кочення та сили нормальної реакції опори:

$$\mu = \frac{M_F}{N}. \qquad (9.16)$$

Коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини.

Виникнення «тертя кочення» можна пояснити, використовуючи як енергетичний, так і силовий підхід.

Дисипативні сили при коченні тіла можуть виникнути у тому випадку, коли поверхня, по якій котиться тіло, зазнає непружньої деформації. Внаслідок такої деформації певна частина механічної енергії тіла, що котиться, переходить у теплову. У результаті кінетична енергія тіла, що котиться, зменшується з часом, і тіло починає сповільнюватись.

Динамічний підхід до пояснення тертя кочення полягає у розгляді сил, що діють на тіло з боку деформованої поверхні. Внаслідок деформацій, сили реакції опори в різних місцях контакту тіла з поверхнею набувають різних значень (рис. 9.3). Їх рівнодіюча не дорівнює нулю і створює ненульовий обертальний момент відносно центру мас тіла. У результаті відбувається гальмування обертального руху тіла.

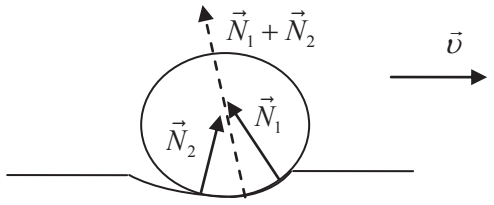


Рис. 9.3 Виникнення сили тертя кочення

При коченні (якщо швидкість обертання тіла невелика), втрати механічної енергії за одиницю часу набагато менші за відповідні втрати при ковзанні. Відповідно, при заміні ковзання коченням менше зношуються контактуючі поверхні, що і використовують на практиці, де це можливо (наприклад, використовуючи кулькові і роликові підшипники).

Аналіз руху похилого маятника

Для визначення коефіцієнта тертя кочення скористаємося законом збереження енергії. При коченні кулі по площині дисипативні сили виконують від'ємну роботу, внаслідок чого повна механічна енергія кулі зменшується. У точках повороту кулі A та B, тобто в тих точках, в яких її швидкість рівна нулю, повна механічна енергія кулі визначається її потенціальною енергією у полі сили тяжіння. Тому зменшення потенціальної енергії маятника при його переміщенні від однієї точки повороту до іншої дорівнює роботі сил тертя кочення на шляху між точками повороту:

$$\Delta E = \Delta U = -A_{коч}. \qquad (9.17)$$

Це зменшення потенціальної енергії кулі за половину одного коливання дорівнюватиме

$$\Delta U = mg\Delta h, \qquad (9.18)$$

де m – маса кулі, g – прискорення вільного падіння. На яку величину Δh зменшиться висота підняття центра мас кулі в положенні максимального відхилення за цей час? Розглянемо рис. 9.4. Нехай A' і B' – проекції точок A і B на вісь OO'. Тоді довжина відрізка $A'B'$, яку позначимо Δl, дорівнює

$$\Delta l = A'B' = l\cos(\alpha - \Delta\alpha) - l\cos\alpha, \qquad (9.19)$$

де l – довжина нитки, яка дорівнює радіусу дуги AB, $\Delta\alpha$ – зменшення амплітуди коливань за половину періоду. Проекція відрізка $A'B'$ на вертикальну вісь дорівнює Δh:

$$\Delta h = \Delta l \sin\beta = l\sin\beta\left\lfloor \cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos\alpha \right\rfloor, \qquad (9.20)$$

де β – кут нахилу похилої площини до горизонталі. Підставляючи (9.20) в (9.18) отримаємо

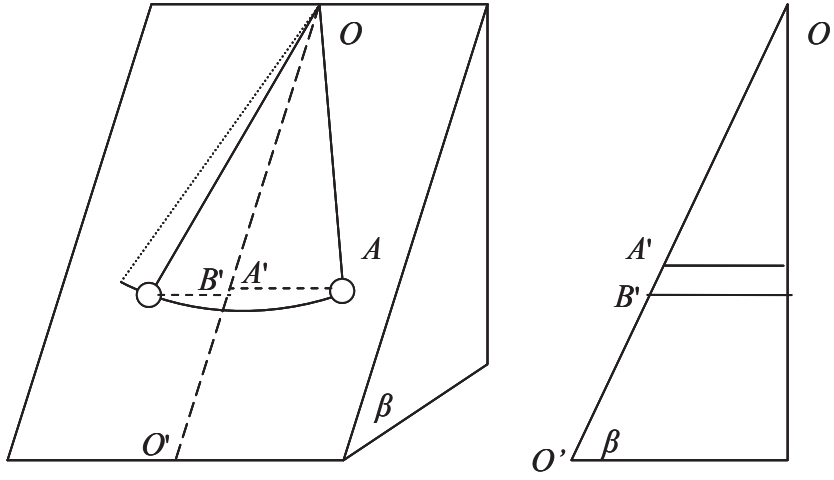


Рис. 9.4 Геометрична побудова для похилого маятника

$$\Delta U = mgl\sin\beta\left\lfloor \cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos\alpha \right\rfloor. \qquad (9.21)$$

Знайдемо роботу сил тертя кочення. Оскільки модуль сили тертя є сталим, то її робота за деякий час t дорівнюватиме $A_{коч} = -F_{коч}\Delta S$, де ΔS – довжина дуги, яку проходить куля цей час. Як випливає зі рівнянь (9.15) і (9.16), сила тертя дорівнює

$$F_{коч} = \frac{\mu}{R} N , \qquad (9.22)$$

де μ – коефіцієнт тертя кочення, $N = mg\cos\beta$ – модуль сили нормального тиску кулі на площину. Довжина дуги AB дорівнює:

$$\Delta S = l\left(2\alpha - \Delta\alpha\right). \qquad (9.23)$$

Тоді робота сил тертя кочення на шляху ΔS дорівнюватиме:

$$A_{коч} = -\frac{\mu}{R} mgl\left(2\alpha - \Delta\alpha\right)\cos\beta . \qquad (9.24)$$

Таким чином з рівнянь (9.21) і (9.24), враховуючи (9.17), отримаємо:

$$\mu = R \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \frac{\cos\left(\alpha - \Delta\alpha\right) - \cos\alpha}{2\alpha - \Delta\alpha} . \qquad (9.25)$$

Наостанок спростимо дріб у попередньому виразі. Оскільки зменшення кута максимального відхилення маятника за половину періоду $\Delta\alpha$ є малим, то можна виконати такі спрощення:

$$\cos\left(\alpha - \Delta\alpha\right) - \cos\alpha = -2\sin\frac{\alpha - \Delta\alpha - \alpha}{2}\sin\frac{\alpha - \Delta\alpha + \alpha}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{-\Delta\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha - \Delta\alpha}{2} \approx \left|\begin{matrix}\Delta\alpha \ll 1 \\ \Delta\alpha \ll \alpha\end{matrix}\right| \approx 2 \cdot \frac{\Delta\alpha}{2} \cdot \sin\alpha = \Delta\alpha\sin\alpha . \qquad (9.26)$$

Тоді формула (9.25) набуде вигляду:

$$\mu = R\Delta\alpha\frac{\sin\alpha}{2\alpha - \Delta\alpha}\mathrm{tg}\beta \approx R\Delta\alpha\frac{\sin\alpha}{2\alpha}\mathrm{tg}\beta . \qquad (9.27)$$

За умови, що початкове значення максимального відхилення маятника від положення рівноваги є невеликим ($\alpha \ll 1$) можна вважати, що $\sin\alpha \approx \alpha$, а тому вираз (9.27) набуде вигляду

$$\mu = \frac{\Delta\alpha}{2} R\mathrm{tg}\beta . \qquad (9.28)$$

Зрозуміло, що за одне повне коливання зменшення амплітуди коливань буде рівним $2\Delta\alpha$, а за n повних коливань зменшення амплітуди становитиме $\Delta\alpha_n = 2n\Delta\alpha$. Звідси отримаємо формулу, яка й використовується у цій лабораторній роботі для визначення

коефіцієнта тертя кочення:

$$\mu = R\frac{\Delta\alpha_n}{4n}\mathrm{tg}\beta . \qquad (9.29)$$

ВИМІРЮВАННЯ

1. Виміряти штангенциркулем діаметр кулі і визначити її радіус. Повторити вимірювання три рази.
2. Встановити похилу площину під кутом 30°. Відхилити маятник на кут 8° і підрахувати кількість коливань, за яку амплітуда зменшиться на 2°. Повторити дослід 3–5 разів.
3. Провести досліди для такого ж початкового кута відхилення, і підрахувати кількість коливань, за яку амплітуда зменшиться на 3° та на 4°. Кожен з дослідів повторити 3–5 разів.
4. Встановити похилу площину під кутами 45° і 60° та повторити пункти 2 і 3.
5. Результати вимірювань занести в таблицю 9.1.
6. За вказівкою викладача провести виміри для інших куль або пластин.

Табл. 9.1

R, мм	β, °	$\Delta\alpha = 2°$					$\Delta\alpha = 3°$					$\Delta\alpha = 4°$				
	30°															
	45°															
	60°															

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Перевести значення кутів $\Delta\alpha$ з градусів у радіани.
2. Визначити середнє значення кількості коливань n для кожного кута $\Delta\alpha$.
3. За формулою (9.29) розрахувати значення коефіцієнту тертя кочення для різних значень кута нахилу β.
4. Порівняти отримані значення коефіцієнта тертя для різних кутів нахилу з табличними даними.

5. Розрахувати похибки вимірювання для кожної серії дослідів. У разі суттєвої (більше, ніж величина довірчого інтервалу) відмінності експериментальних і табличних значень цей факт обов'язково необхідно пояснити.

Теоретичні завдання

1. Дайте означення сили тертя. Поясніть природу сил тертя і перерахуйте види тертя.
2. Поясніть механізм виникнення тертя ковзання.
3. Поясніть механізм виникнення тертя кочення.
4. Використовуючи правила векторного добутку та формулу (9.15) визначте напрямок дисипативної сили, що виникає при коченні (силу тертя кочення).
5. За яких умов сила тертя кочення набагато менша, ніж сила тертя ковзання, а за яких умов ці сили порівняні за величиною?
6. Виведіть робочу формулу (9.29) для визначення коефіцієнта тертя кочення.
7. Як і чому залежить коефіцієнт тертя кочення від нахилу поверхні?

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронна версія // Київ, 2013.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 3-е изд. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. – 432 с.
3. Каленков С.Г, Соломахо Г.И. Практикум по физике – М: Высшая школа, 1990 – 111 с.
4. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Е.М.Лифшиц – Курс общей физики. Механика и молекулярная фізика М.: Наука, 1965 – 399 с.

РОБОТА № 10

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ВНУТРІШНЬОГО ТЕРТЯ РІДИНИ МЕТОДОМ СТОКСА

Мета роботи

1. Ознайомитися з особливостями руху сферичного тіла під дією сили рідинного тертя.
2. Ознайомитися з методом Стокса визначення коефіцієнта в'язкості рідини. Експериментально визначити коефіцієнт в'язкості гліцерину.

Опис експериментальної установки

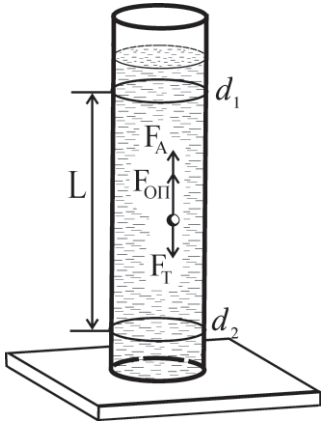


Рис.10.1. Схема експериментальної установки

Прилад для визначення коефіцієнта внутрішнього тертя (в'язкості) рідини методом, запропонований британським вченим Джорджем Гебріелом Стоксом (1819–1903), складається із скляного циліндра, заповненого рідиною, що досліджується (рис.10.1). Цей циліндр закріплюється вертикально в середині другого циліндра більшого діаметру, що заповнений водою. Зовнішній циліндр з водою відіграє роль термостата, що запобігає коливанням температури в системі. На зовнішньому циліндрі

нанесені дві горизонтальні позначки (d_1 та d_2) на відстані L одна від одної. Металеві кульки, що використовуються для визначення коефіцієнта в'язкості рідини, виготовлені з важкого легкоплавкого сплаву (олово, свинець, вісмут та кадмій), винайденого американським вченим Барнабасом Вудом. Вони мають досить малий діаметр, що визначається за допомогою вимірювального мікроскопа МИР-12.

Теоретичні відомості

Розглянемо рух частинки з масою m та швидкістю $\vec{\upsilon}$. **Імпульсом** частинки називається векторна величина $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Для знаходження умов зміни з часом та збереження імпульсу необхідно дослідити похідну за часом:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}, \qquad (10.1)$$

де $\vec{F}$ – сума сил, що діють на частинку. Отже, **імпульс частинки змінюється під дією суми прикладених до неї сил**, причому елементарний приріст імпульсу $d\vec{p}$ співпадає з напрямом цієї суми, а його величина пропорційна величині суми сил та проміжку часу, протягом якого цей приріст імпульсу виникає. Із рівняння (10.1) випливає закон збереження імпульсу частинки: **імпульс частинки зберігається, якщо сума всіх сил, що прикладені до частинки, дорівнює нулю.**

В'язкість – це властивість рідини (газу) чинити опір відносному руху шарів рідини (газу). Надалі вживатимемо термін "рідина", хоча все сказане стосуватиметься також і газу. В'язкість виявляється в тому, що при відносному переміщенні шарів рідини шар, що рухається повільніше, "гальмує" шар, що рухається швидше, і навпаки. Явище в'язкості зумовлене законом збереження (зміни) імпульсу молекул рідини. Якщо, наприклад, розглянути взаємодію (лобове зіткнення) двох молекул з шарів, один з яких рухається, а інший – ні, то, враховуючи третій закон Ньютона, (10.1) перепишеться у вигляді:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = m_1\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -m_2\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}, \qquad (10.2)$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, що діє на молекулу 1 з боку молекули 2, а $\vec{F}_{21}$ – сила, що діє на молекулу 2 з боку молекули 1. Швидкість i-ї молекули $\vec{\upsilon}_i$ за законом додавання швидкостей є сумою швидкості руху шару рідини як цілого та швидкості теплового (броунівського) руху i-ї молекули окремо (власне, завдяки броунівському руху і відбуваються зіткнення). Якщо спроектувати співвідношення (10.2) на напрям налітаючої частинки (молекули), то ми отримаємо:

$$\frac{dp_1}{dt} = m_1\frac{d\upsilon_1}{dt} = -m_2\frac{d\upsilon_2}{dt} = -\frac{dp_2}{dt}. \qquad (10.3)$$

Зважаючи на те, що до зіткнення молекула з другого шару не рухалась $\upsilon_{20} = 0$, рівняння (10.3) матиме розв'язок:

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_{10}) = -m_2\upsilon_2 \quad \text{або} \quad m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_{10}. \qquad (10.4)$$

З (10.4) видно, що при $m_2 \neq 0$ завжди $\upsilon_1 < \upsilon_{10}$, а отже при переміщенні одного шару рідини відносно іншого рух швидшого шару буде сповільнюватись. Таким чином, якщо один з шарів рідини переміщувати з деякою швидкістю відносно інших, то сили внутрішнього тертя гальмуватимуть цей рух. У цьому і полягає явище внутрішнього тертя (в'язкості).

У загальному випадку вираз для сили в'язкості можна отримати з рівняння ***Нав'є-Стокса***, яке для нестисливої рідини має вигляд:

$$\vec{F} = -m(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla})\vec{\upsilon} - V\vec{\nabla}p + \eta V\Delta\vec{\upsilon}, \qquad (10.5)$$

де m і V – маса та об'єм речовини, в якому відбувається взаємодія шарів, $\vec{\upsilon}$ – швидкість певного шару рідини, p – тиск, під яким перебуває рідини, η – коефіцієнт внутрішнього тертя. Якщо при великих швидкостях руху вагому роль відіграє сила, зумовлена різницею тиску ($-V\vec{\nabla}p$), то при малих – сила в'язкості ($\eta V\Delta\vec{\upsilon}$). Крім того, при малих швидкостях модуль члена $-m(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla})\vec{\upsilon}$ є

набагато меншим ніж модуль $\eta V \Delta\vec{\upsilon}$. Тому доданком $-m\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}$ в (10.5) можна знехтувати. Враховуючи це, вираз (10.5) набуде вигляду:

$$F = \eta \frac{d\upsilon}{dz} S, \qquad (10.6)$$

де S – площа поверхні, по якій відбувається взаємодія шарів, z – координата, що відповідає осі, перпендикулярній напряму руху шарів.

Кількісним критерієм малості швидкості руху, що є необхідним для справедливості формули (10.6) є виконання нерівності $Re<<1$. Як Re позначене так зване число Рейнольдса, яке дорівнює відношенню кінетичної енергії одиниці об'єму рідини до роботи сил в'язкості, що діють на цей об'єм. У випадку руху сферичного тіла з радіусом r у рідині з густиною ρ число Рейнольдса визначається як:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon r}{\eta}. \qquad (10.7)$$

У даній лабораторній роботі коефіцієнт в'язкості рідини визначається шляхом вимірювання швидкості рівномірного падіння кульки в рідині. На матеріальне тіло (кульку), що рухається в рідині або газі, діє сила опору середовища. Оскільки при русі тіло захоплює ближній до нього шар рідини, за своєю фізичною природою сила опору є силою внутрішнього тертя, що діє між цим шаром та більш віддаленими від кульки шарами. Сила, що діє на тіло зі сторони ламінарного потоку, називається лобовим опором. Ламінарним потоком називається потік, при якому відсутнє перемішування шарів, що рухаються з різними швидкостями. Лобовий опір складається з двох різних сил: сили, зумовленої різницею тисків на передню та задню поверхні тіла, та сила в'язкості. Як вже зазначалося, нас цікавитиме випадок $\mathrm{Re}<<1$ і, відповідно, дія на кульку лише сили в'язкості. Останню можна записати як:

$$\vec{F} = \mathrm{A} l \eta \vec{\upsilon}. \qquad (10.8)$$

Зауважимо, що формула (10.8) виконується для потоків з малими числами Рейнольдса ($\mathrm{Re}<<1$). Оскільки форма тіла вважається заданою, то його геометричні властивості визначаються лише одним характеристичним лінійним розміром l. Коефіцієнт А залежить від форми тіла та його орієнтації відносно потоку. Теоретичне обчислення А є досить складним, потребує інтегрування рівнянь руху у в'язкому середовищі. Найпростішим є випадок, коли тіло має форму кулі. Для нього Джорджем Стоксом було показано, що $\mathrm{A} = 6\pi$, якщо за характерний розмір l прийняти радіус кулі r. Таким чином одержуємо формулу Стокса

$$\vec{F} = 6\pi r \eta \vec{\upsilon}. \qquad (10.9)$$

Детальний вивід рівняння Нав'є-Стокса (10.5) і формули Стокса (10.9) з використанням рівняння Ейлера для тензора густини потоку імпульсу та врахуванням закону збереження імпульсу наведено в книзі Л.Д.Ландау та Е.М.Лифшица «Теоретическая физика. Гидродинамика».

Розглянемо задачу руху металевої кульки у в'язкій рідині в полі тяжіння Землі. Рівняння руху для такої кульки:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\mathrm{T}} + \vec{F}_{\mathrm{A}} + \vec{F}_{\mathrm{ОП}}, \qquad (10.10)$$

де m – маса кульки, $\vec{F}_{\mathrm{T}} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\cdot\pi r^3 \rho_m \vec{g}$ – сила тяжіння поблизу поверхні Землі, $\vec{F}_{\mathrm{A}} = \frac{4}{3}\cdot\pi r^3 \rho \vec{g}$ – сила Архімеда, $\vec{F}_{\mathrm{ОП}}$ – сила лобового опору, що визначається за формулою (10.9), ρ_m та ρ – густини металу, з якого виготовлено кульку, та в'язкої рідини, відповідно.

Оскільки рух кульки є прямолінійним, направимо вісь x у напрямі руху кульки (вниз). Тоді рівняння руху у проекції на вісь x набуде вигляду

$$m\ddot{x} = \frac{4}{3}\pi(\rho_m - \rho) r^3 g - 6\pi\eta r\dot{x}, \qquad (10.11)$$

звідки отримаємо:

$$\ddot{x}+\frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x}=\frac{4}{3}\pi\frac{(\rho_m-\rho)}{m}\ r^3 g\,. \qquad (10.12)$$

Отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\ddot{x}+\mathrm{B}\dot{x}=\mathrm{C}\,, \qquad (10.13)$$

де $\mathrm{B}=\frac{6\pi\eta r}{m}$, $\mathrm{C}=\frac{4}{3}\pi\frac{(\rho_m-\rho)}{m}\ r^3 g$. Враховуючи те, що $\upsilon\equiv\dot{x}$, рівняння (10.13) можу бути зведене до диференціального рівняння 1-го порядку:

$$\dot{\upsilon}+\mathrm{B}\upsilon=\mathrm{C}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d\upsilon}{dt}+\mathrm{B}\upsilon=\mathrm{C}\,. \qquad (10.14)$$

Розділимо змінні: $\frac{d\upsilon}{\mathrm{C}-\mathrm{B}\upsilon}=dt$ і проінтегруємо:

$$\int\limits_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\mathrm{C}-\mathrm{B}\upsilon}=\int\limits_{t_0}^{t}dt\,. \qquad (10.15)$$

Конструкція приладу даної лабораторної роботи така, що кульку можна відпускати майже над поверхнею гліцерину. Тому в початковий момент часу $t_0=0$ початкова швидкість $\upsilon_0=0$. Зробимо заміну змінної: $\mathrm{C}-\mathrm{B}\upsilon=s$. У результаті отримаємо:

$$\int\limits_{0}^{\mathrm{C}-\mathrm{B}\upsilon}\frac{ds}{s}=\int\limits_{0}^{t}dt\quad\Rightarrow\quad-\frac{1}{\mathrm{B}}\ln\frac{\mathrm{C}-\mathrm{B}\upsilon}{\mathrm{C}}=t\,, \qquad (10.16)$$

Звідки отримаємо вираз, що дає залежність швидкості від часу:

$$\dot{x}(t)\equiv\upsilon(t)=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\left(1-e^{-\mathrm{B}t}\right). \qquad (10.17)$$

Звідси видно, що рівномірним рух кульки не буде. Але з часом експоненціальний доданок буде набагато меншим за 1 $\left(\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-e^{-\mathrm{B}t}\right)=1\right)$, і ним можна буде знехтувати. Рух кульки, починаючи з цього моменту часу (позначимо його τ) буде майже рівномірним, прискорення відсутнє. Зауважимо, що в рамках простої моделі, використаної тут, час встановлення рівномірного

руху є нескінченним: $\tau\to\infty$. Проте, якщо в більш точній моделі врахувати, що у виразі для сили опору присутніми будуть також квадратичний та члени вищих за швидкістю порядків, то час τ матиме скінченне значення, тобто рівномірний рух кульки буде встановлюватись за скінченний час. Таким чином для швидкості рівномірного руху υ_τ отримаємо:

$$\upsilon_\tau=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}=\frac{\left(\frac{4}{3}\pi\frac{(\rho_m-\rho)}{m}\ r^3 g\right)}{\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)}=\frac{2}{9}\frac{(\rho_m-\rho)}{\eta}\ r^2 g\,. \qquad (10.18)$$

Звідси коефіцієнт в'язкості:

$$\eta=\frac{2}{9}\frac{(\rho_m-\rho)}{\upsilon_\tau}r^2 g\,. \qquad (10.19)$$

Формулу (10.19) можна застосовувати при русі кульки в необмеженому середовищі. Але подальші досліди Стокса показали, що (10.19) не виконується для посудини з рідиною довільної форми. В дійсності, як експериментально довів німецький вчений Рудольф Вальтер Ладенбург (1882–1952), на рух кульки впливають стінки посудини, де знаходиться рідина. Ладенбург показав, що для посудини циліндричної форми нескінченної довжини з внутрішнім радіусом R вплив стінок можна врахувати додаванням у знаменнику формули (10.18) множника $\left(1+2{,}4\frac{r}{R}\right)$. У подальших дослідах Ладенбурга виявлено, що і на скінченність довжини циліндра також потрібна поправка у вигляді множника у знаменнику, що дорівнює $\left(1+3{,}1\frac{r}{L_1}\right)$, де L_1 – повна довжина циліндра з рідиною.

Отже, враховуючи викладене вище, формула (10.19) набуде вигляду:

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho_m - \rho)}{\upsilon_\tau\left(1+2{,}4\frac{r}{R}\right)\left(1+3{,}1\frac{r}{L_1}\right)} r^2 g \qquad (10.20)$$

або

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho_m - \rho)}{L\left(1+2{,}4\frac{r}{R}\right)\left(1+3{,}1\frac{r}{L_1}\right)} r^2 g t\,, \qquad (10.21)$$

де L – той шлях, який проходить кулька при рівномірному русі зі швидкістю υ_τ за деякий час t ($L = \upsilon_\tau t$) у в'язкій рідині. Величини r, R, L, L_1 та t визначаються експериментально, решта – за довідниками.

Використовуючи вираз (10.18), запишемо умову, за якою справджується нерівність $Re<<1$:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\upsilon_\tau r}{\eta} = \frac{\rho r}{\eta}\cdot\frac{2}{9}\frac{(\rho_m - \rho)}{\eta} r^2 g = \frac{2}{9}\frac{\rho(\rho_m - \rho)}{\eta^2} r^3 g << 1\,,$$

звідки:

$$r^3 << \frac{9}{2}\frac{\eta^2}{\rho(\rho_m - \rho)g}\,. \qquad (10.22)$$

Вимірювання

У даній роботі вимірюють час падіння t кульки, виготовленої зі сплаву Вуда, у довгій циліндричній посудині, заповненій в'язкою рідиною (гліцерин), і за допомогою формули (10.21) визначають коефіцієнт в'язкості η.

Провести такі вимірювання.

1. Виміряти діаметр внутрішнього циліндра R за допомогою штангенциркуля.
2. Виміряти відстань між двома позначками L на зовнішньому циліндрі та повну довжину внутрішнього циліндра L_1.
3. За допомогою мікроскопа МИР-12 виміряти діаметр кульки зі сплаву Вуда.

4. Відпустити кульку безпосередньо над поверхнею рідини у внутрішньому циліндрі та за допомогою секундоміра визначити час t проходження кульки між двома позначками на зовнішньому циліндрі.
5. Виміри п.3 та п.4 виконати не менше ніж для 10 кульок.

Експериментальні завдання

1. За формулою (10.21) визначити коефіцієнт в'язкості рідини у внутрішньому циліндрі η.
2. Знайти похибку вимірювання коефіцієнта в'язкості $\Delta\eta$.
3. Перевірити виконання умови застосовності формули Стокса, використовуючи формулу (10.22).
4. Визначити величину відношення r/R, при якому похибка визначення величини η не буде перевищувати 1%. При цьому похибка η розраховується за формулою $\varepsilon_\eta = \left|\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0}\right| = \left|\frac{\eta}{\eta_0} - 1\right|$, де

$$\eta_0 = \frac{2}{9}\frac{(\rho_m - \rho)}{L} r^2 g t \qquad – \qquad (10.23)$$

наближене значення коефіцієнта в'язкості, отримане в наближенні відсутності впливу стінок посудини на рух кульки, а

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho_m - \rho)}{L\left(1+2{,}4\frac{r}{R}\right)} r^2 g t \qquad – \qquad (10.24)$$

значення η, розраховане з урахування впливу стінок.

5. Визначити величину відношення r/L_1, при якому похибка визначення величини η не буде перевищувати 1%. При цьому похибка η розраховується за формулою $\varepsilon_\eta = \left|\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0}\right| = \left|\frac{\eta}{\eta_0} - 1\right|$, де

η_0 – наближене значення, розраховане за формулою (10.23), а

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho_m - \rho)}{L\left(1 + 3{,}1\frac{r}{L_1}\right)} r^2 g t \qquad - \qquad (10.25)$$

значення η, розраховане з урахування скінченності довжини циліндра.

6. Розрахувати час, за який швидкість кульки досягне значення, що відрізняється від швидкості рівномірного руху на 1%.

Теоретичні завдання

1. Записати та сформулювати закон збереження імпульсу частинки та системи частинок.
2. Дати визначення явища внутрішнього тертя.
3. Пояснити фізичну природу виникнення сил внутрішнього тертя.
4. Вказати, які сили діють на кульку, що рухається в рідині.
5. Вивести формулу для визначення коефіцієнта в'язкості в даній роботі.
6. Вивести залежності швидкості кульки та її прискорення від часу та зобразити схематичні графіки цих залежностей.
7. Пояснити суть методу Стокса.
8. Що таке критерій Рейнольдса і навіщо він потрібний?
9. Як час встановлення рівномірного руху кульки залежить від її радіусу?
10. Для чого в роботі потрібна зовнішня циліндрична посудина, заповнена водою?
11. Пояснити фізичні причини впливу стінок внутрішньої посудини на рух кульки.
12. Пояснити, як залежать від температури коефіцієнти в'язкості більшості рідин.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.

2. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Т.1. Механика» // Москва, Наука, 1989.
3. «Физический практикум», под редакцией В. И. Ивероновой // Москва, Физматгиз, 1962.
4. Л. Д.Ландау, Е. М.Лифшиц, «Гидродинамика. Теоретическая физика: т.VI» // Москва, Наука, 1986.
5. И. Л. Фабелинский, «Избранные труды. В 2 т. Т.2», под редакцией В. Л.Гинзбурга // Москва, Физматлит, 2005.
6. R. Ladenburg, «Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck» // Annalen der Physik.– 1907.– Vol. 327 (22), Iss.2.– P.287–309.

РОБОТА № 11

ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ ЗА РОЗТЯГОМ ДРОТИНИ НА ПРИЛАДІ ЛЕРМАНТОВА

Мета роботи

1. Експериментально перевірити закон Гука.
2. Визначити модуль Юнга досліджуваного матеріалу за розтягом дротини.

Теоретичні відомості

Під дією сил тверде тіло рухається як ціле або, якщо на тіло накладені зв'язки, одні частини тіла рухаються відносно інших. При цьому змінюється геометрична форма тіла і/або його об'єм. Такі зміни називаються деформаціями. Існують два граничні випадки: ***пружні деформації*** та ***пластичні деформації***. Пружні деформації повністю зникають після припинення дії зовнішніх сил – форма і об'єм тіла відновлюються повністю. Пластичні деформації залишаються після припинення дії сил повністю чи частково. Тип деформації залежить як від властивостей матеріалу, так і від прикладених сил. У загальному випадку закони, які визначають сили, що виникають при деформації, є складними і неоднозначними. Деформації можуть залежати як від величини і характеру прикладених сил, так і від властивостей речовини. При ***пружних деформаціях***, якщо вони є малими, а тіла пружними, то сили однозначно визначають деформації і навпаки.

Усі деформації можуть бути зведені до елементарних – однорідному розтягу (стиснення) та зсуву. Іноді виділяють окремо більш складні деформації – кручення та згину. Розглянемо ці типи більш детально.

Деформації розтягу та стиснення

Деформацією розтягу чи стиснення називається деформація, яка пов'язана з відносним видовженням чи скороченням частини тіла, яка деформується. Розглянемо розтяг однорідного пружного стержня, один кінець якого закріплений, а на другий діє зовнішня сила $\vec{F}$ (рис.11.1).

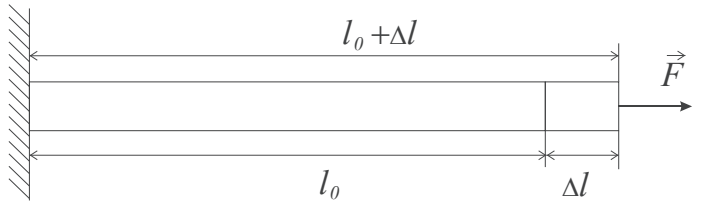


Рис. 11.1. Деформація розтягу стержня.

Якщо матеріал стержня є однорідним, то всі частини стержня будуть розтягнуті однаково під дією зовнішньої сили. Таку деформацію можна охарактеризувати відносним видовженням ε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}\ , \qquad (11.1)$$

де Δl – абсолютне видовження стержня, який мав початкову довжину l_0. Для будь-якого іншої ділянки стержня величина ε є однаковою і залежить від прикладеної сили. Під дією цієї сили в стержні виникають внутрішні сили взаємодії між різними його частинами. Із умови механічної рівноваги кожної окремої частини стержня випливає, що сума сил, які діють на неї, рівна нулю, тобто в будь-якому поперечному перерізі виникає сила рівна $\vec{F}$. Величину сили, яка діє на одиничну площу поперечного перерізу, називають механічним напруженням T:

$$T = \frac{F}{S}, \qquad (11.2)$$

де S – площа поперечного перерізу.

Якщо сила F є невеликою, то напруження T і відносне видовження ε є пропорційними одне одному. Якщо силу поступово зменшити до нуля, то стержень повернеться до початкового стану. Діапазон малих деформацій та напружень, в якому зв'язок між T і ε є однозначним, називається областю пружних деформацій, а

максимальне значення напруження для цієї області називається ***границею пружності***. При збільшенні сили зв'язок між T і ε стає нелінійним та неоднозначним – тіло переходить в область текучості, при цьому в тілі відбуваються необоротні процеси.

В області пружних деформацій виконується співвідношення, яке називають законом Гука:

$$T = E \cdot \varepsilon \,, \tag{11.3}$$

де E – постійний коефіцієнт, що має розмірність [Н/м^2], і називається ***модулем Юнга***. Часто цей закон записують у вигляді:

$$\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}, \tag{11.4}$$

де k – ***коефіцієнт пружності***, що має розмірність [Н/м]. Модуль Юнга і коефіцієнт пружності залежать від типу матеріалу, з якого виготовлено стержень.

Для того, щоб тіло деформувати, потрібно над ним виконати роботу, і в свою чергу деформоване тіло може виконувати роботу. Якщо тіло може виконувати роботу, то кажуть, що воно має запас потенціальної енергії. Така ***енергія*** називається ***пружною*** і вона є ***рівною роботі зовнішніх сил яка виконується під час деформації тіла***. Ця рівність – пружної енергії та роботи зовнішніх сил виконується за умови, якщо деформація відбувається достатньо повільно і в кожний момент часу зовнішні сили урівноважені силами пружності, а також відсутні сили внутрішнього тертя в матеріалі. Обчислимо пружну енергію стержня, для цього прикладемо до нього силу, яка буде його розтягувати і буде змінюватися від початкового значення *f=0* до кінцевого значення *f=F*. Видовження стержня буде змінюватися від *x=0* до кінцевого значення $x = \Delta l$. Використаємо закон Гука $f(x) = kx$, тоді приріст потенціальної енергії $dU = f(x)dx = kxdx$, звідки знайдемо повну пружну енергію:

$$U = \int_0^{\Delta l} kxdx = \frac{k\Delta l^2}{2}. \tag{11.5}$$

Оскільки в кінцевому стані, коли $x = \Delta l$, можна записати $F = f(\Delta l) = k\Delta l$, а отже вираз (11.5) можна представити у вигляді:

$U = \frac{F\Delta l}{2}$. Знайдемо об'ємну густину пружної енергії, тобто енергію, яка припадає на одиницю об'єму розтягнутого чи стиснутого стержня для цього цей вираз поділимо на об'єм стержня $V = SL$. Отримаємо:

$$U = \frac{1}{2}\frac{F}{S}\frac{\Delta l}{L} = \frac{1}{2}T\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \,. \tag{11.6}$$

Під дією зовнішньої сили стержень може розтягуватися або стискатися. При цьому змінюється не тільки повздовжні розміри стержня, а також і його поперечні розміри. Якщо стержень розтягують, то поперечні розміри зменшуються, якщо стискають – збільшуються. Позначимо як a_0 розмір, який характеризує поперечний розмір стержня (якщо стержень круглий, то це буде діаметр, якщо прямокутний – розмір однієї зі сторін основи стержня) до деформації, а a – після деформації. Нехай стержень розтягується під дією сили *F*, тоді величину $\frac{\Delta a}{a_0} \approx \frac{\Delta a}{a}$, де $\Delta a = a - a_0$, називають ***відносним поперечним стисненням стержня***. Відношення відносного поперечного стиснення до відносного видовження називається коефіцієнтом Пуассона:

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a} \Big/ \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a}{\Delta l}\frac{l}{a}. \tag{11.7}$$

Коефіцієнт Пуассона залежить тільки від матеріалу тіла і є важливою характеристикою пружних властивостей речовини. Модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона μ залежать тільки від речовини і повністю характеризують пружні властивості ізотропної речовини. Всі інші пружні сталі можуть бути виражені через E і μ.

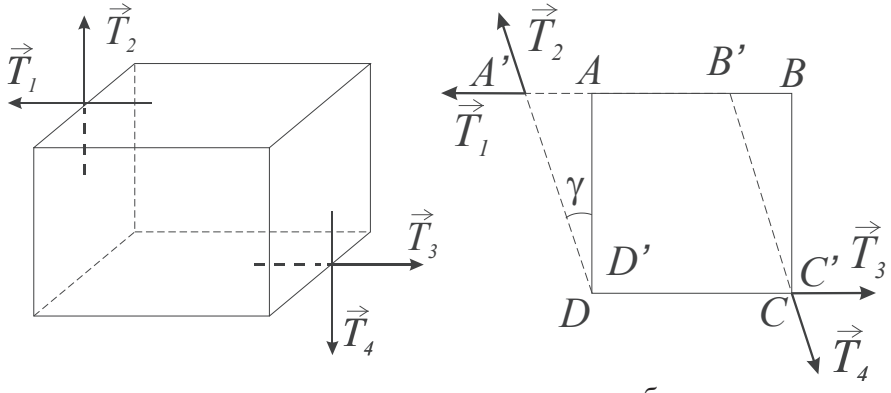
Деформація зсуву

Розглянемо деформацію кубика, який вирізаний з однорідної та ізотропної речовини та на який діють дотичні сили, які прикладені до його граней (рис. 11.2). Для виконання умов рівноваги необхідною є рівність всіх сил, які прикладені до граней кубика.

Оскільки площа граней кубика є однаковою, то ця умова відповідає рівності всіх напружень, прикладених до граней кубика:

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 \,. \qquad (11.8)$$

Дійсно, для відсутності поступального руху кубика як цілого необхідно виконання умови: $T_1 = T_3$, $T_2 = T_4$, а для відсутності обертального руху потрібно $T_1 = T_4$, $T_2 = T_3$. Досвід показує, що під дією прикладених напружень квадрат *ABCD* переходить в ромб $A'B'C'D'$: довжина діагоналі *AC* збільшується, а *BD* зменшується. З рис. 11.2(б) видно, що деформація полягає в тому, що всі шари кубика, які є паралельні до основи *DC*, зсуваються в одному напрямі, паралельному до цієї основи. ***Величина зсуву пропорційна відстані від шару до основи***. Тому така деформація називається ***деформацією зсуву***. Деформацію зсуву можна охарактеризувати кутом зсуву γ.



а б

Рис. 11.2. Деформація зсуву.

Якщо кут зсуву є малим ($\gamma \ll 1$), то можна використати закон Гука, оскільки існує область пропорційності, де виконується лінійний зв'язок між кутом зсуву γ та тангенційним напруженням *T*:

$$T = G \cdot \gamma \,, \qquad (11.9)$$

де коефіцієнт *G* називається ***модулем зсуву***. Розмірність *E* і *G* є однаковою – [Н/м^2], оскільки кут γ є безрозмірною величиною. Модуль зсуву залежить тільки від виду матеріалу, з якого виготовлено тіло та не залежить від геометричної форми тіла.

Деформація кручення

Як приклад деформації кручення можна розглянути закручування однорідного круглого стержня, коли одна основа стержня повертається відносно іншої навколо осі, яка проходить через центр стержня, на деякий кут φ. Якщо уявно розбити стержень на елементарні нескінченно малі об'єми (рис. 11.3), то буде зрозуміло, що під час закручування кожний елемент об'єму зазнає деформації зсуву.

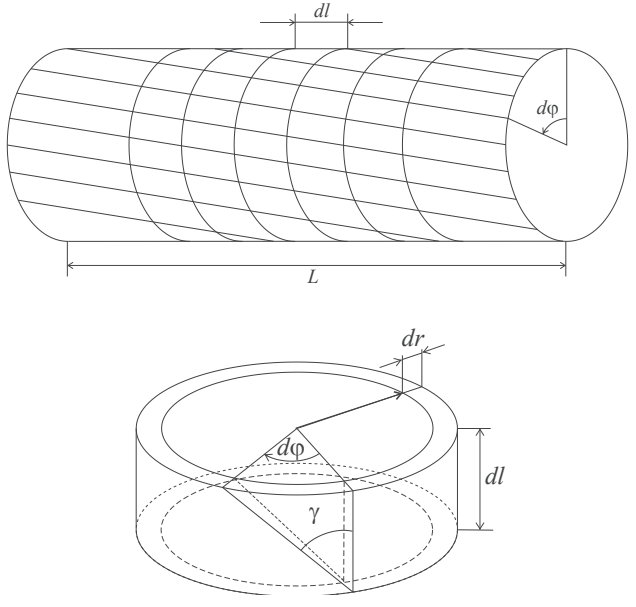


Рис. 11.3. Деформація кручення.

Деформація зсуву буде різною для різних елементів об'єму – максимальною біля зовнішньої поверхні стержня і мінімальною в області осі повороту. Тому кручення не можна розглядати як елементарний вид деформації. Якщо кут закручування є малим, то матеріал стержня буде знаходитися в області пружності, і можна описувати зв'язок між моментом сил M, які закручують стержень, і кутом повороту φ за допомогою закону Гука:

$$M = D \cdot \varphi, \qquad (11.10)$$

де D – модуль кручення.

Знайдемо зв'язок між модулем кручення і модулем зсуву. На основі стержня кут повороту $\varphi=0$, а на іншому кінці стержня, на відстані L, рівний φ (рис. 11.3). Якщо стержень є однорідним, то будь-які виділені частини основи стержня довжиною dl повернуться на однаковий кут $d\varphi$ один відносного одного, тому будуть виконуватися співвідношення:

$$\frac{\varphi}{L} = \frac{d\varphi}{dl} \quad \text{та} \quad d\varphi = dl\frac{\varphi}{L}\ . \qquad (11.11)$$

Виділимо з частини стержня dl кільце радіусом r і товщиною dr. З рис. 11.3 видно, що кут кручення $d\varphi$ зв'язаний з кутом деформації зсуву γ простим геометричним співвідношенням:

$$\gamma dl = r d\varphi, \qquad (11.12)$$

де враховано, що кути $d\varphi$ та γ є малими і синус малого кута можна замінити його значенням, вираженим в радіанах. Дотична сила, яка діє на поверхні кільця площею $2\pi r dr$ визначимо, використовуючи співвідношення (11.9) та (11.12):

$$dF = Tds = T \cdot 2\pi r dr = G\gamma \cdot 2\pi r dr = G \cdot 2\pi r^2 \frac{d\varphi}{dl} dr\ .$$

Елементарний момент сили, який діє на відстані r від осі:

$$dM = r \cdot dF = G \cdot 2\pi r^3 \frac{d\varphi}{dl} dr\ .$$

Сумарний момент внутрішніх сил, який діє в довільному перерізі стержня, можна знайти, якщо проінтегрувати dM по радіусу стержня:

$$M = 2\pi G \int_0^R r^3 \frac{d\varphi}{dl} dr = \frac{1}{2}\pi G R^4 \frac{d\varphi}{dl}\ . \qquad (11.13)$$

Цей момент буде однаковим у всіх поперечних перерізах стержня, і буде рівний моменту сил, які закручують стержень. Використавши (11.11), знайдемо:

$$M = \frac{\pi G R^4}{2L}\varphi\ . \qquad (11.14)$$

Порівнюючи отриману формулу з (11.10), знайдемо зв'язок між модулем кручення та модулем зсуву:

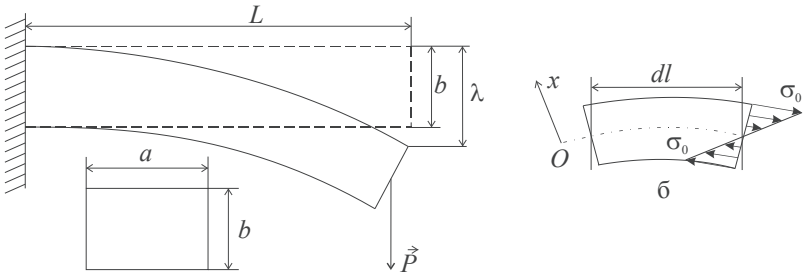
$$D = \frac{\pi R^4}{2L} G\ . \qquad (11.15)$$

Отримане співвідношення є підтвердженням того, що деформація кручення не є елементарною, оскільки залежить не тільки від властивостей матеріалу, а й від геометрії (довжини та радіуса стержня) тіла.

Деформація згину

Якщо прямий пружний стержень закріпити нерухомо одним кінцем, а до другого кінця прикласти силу $\vec{P}$, то цей кінець стержня опуститься, тобто стержень зігнеться (рис. 11.4(а)). Очевидно, що за такої деформації верхні шари стержня будуть розтягуватися, а нижні будуть стискатися (рис. 11.4(б)), а середній шар буде зберігати свою довжину і тільки викривиться – його називають ***нейтральним шаром***.

Переміщення, яке здійснить вільний кінець стержня, називається ***стрілою згину***. Стріла згину буде тим більша, чим більша сила $F_з$ і буде залежати від геометричної форми стержня та модуля пружності. Для малих деформацій виконується умова, що в кожному малому об'ємі стержня відбуваються лише деформації розтягу і стиснення. Розглянемо деформації стержня під дією моменту сили, прикладеного до його вільного кінця. Оскільки деформації малі, то і значення стріли згину буде значно меншим за довжину стержня. Тому будемо вважати, що кут між $\vec{P}$ і $\vec{L}$ завжди дорівнює 90°, тому модуль момента сили можна розрахувати за



а б

Рис. 11.4. Деформація згину. (а) $\vec{P}$ – сила, яка викликає деформацію, λ – стріла згину, *a, b* – поперечні розміри стержня; (б) напруження, які виникають в стержні.

формулою $M = L \cdot P$. Виділимо зі стержня шматочок довжиною dl. Якщо деформації малі, то напруження в кожному виділеному шарі шматочка стержня буде пропорційно змінюватися при віддаленні від нейтрального шару (рис. 11.4(б)):

$$\sigma = \sigma_0(l)\frac{x}{h}, \qquad (11.16)$$

де x – відстань від даного шару до нейтрального, $\sigma_0(l)$ – напруження в найбільш віддаленому шарі, який знаходиться на відстані h від нейтрального, l – координата елемента стержня dl. Якщо поперечний переріз стержня прямокутний зі сторонами *a* і *b,* то нейтральний шар буде розташований посередині стержня, а отже $h = {}^{b}/_{2}$. На кожний шар товщиною dl, який віддалений від нейтрального на відстань *x*, діє сила:

$$df = \sigma a dx = \frac{2\sigma_0(l)a}{b}xdx.$$

Результуюча всіх цих сил буде рівною нулю, оскільки на однаковій відстані від нейтрального шару сили є однакові за модулем, але направлені протилежно. Сумарний момент цих сил відносно нейтрального шару повинен бути рівний моменту зовнішньої сили. Обчислимо цей момент інтегруючи по всьому перерізу:

$$M_l = \int_{-b/2}^{b/2} xdf = \frac{2\sigma_0(l)a}{b}\int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx = \frac{2\sigma_0(l)}{6}ab^2. \qquad (11.17)$$

Визначимо лінію згину стержня, який закріплений одним кінцем, під дією навантаження *P* (рис 11.4(а)). Нехай рівняння, яке описує лінію, має вигляд: $y = f(l)$ (рис 11.4(б)). Якщо деформації малі, то й кут буде малий, тоді кут між напрямом дотичної та недеформованим стержнем в точці *l* рівний:

$$\alpha \approx tg\alpha = \frac{dy}{dl},$$

а зміна напряму дотичної при переході від точки *l* до точки $l + dl$ буде рівна:

$$d\alpha = \frac{d}{dl}\left(\frac{dy}{dl}\right)dl = \frac{d^2y}{dl^2}dl.$$

З рис. 11.4(а) та 4(б) видно, що відносне видовження шару, який є найбільш віддаленим від нейтрального, рівне:

$$\varepsilon(l) = \frac{d\alpha}{dl}\frac{b}{2}.$$

Використовуючи закон Гука, отримаємо:

$$\sigma_0(l) = E\varepsilon(l) = E \cdot \frac{b}{2}\frac{d^2y}{dl^2} \qquad (11.18)$$

З урахуванням зв'язку між M_l та $\sigma_0(l)$ отримаємо рівняння для залежності $y = f(l)$:

$$\frac{d^2y}{dl^2} = \frac{12P}{ab^3E}(L - l). \qquad (11.19)$$

Двічі послідовно проінтегруємо (11.19) в межах від 0 до *L.,* Отримаємо, що стріла згину для стержня довжиною *L*, шириною *a* та висотою *b* описується формулою:

$$\lambda = y(L) = \frac{4PL^3}{ab^3E}. \qquad (11.20)$$

У випадку, коли стержень обома кінцями вільно спирається на опори і навантажений посередині (зовнішньою вагою чи власною)

замість P потрібно підставити $P/2$, а замість L – $L/2$. У цьому випадку стержень себе поводить таким чином, начебто він закріплений посередині, а до його кінців прикладена сила $P/2$, яка направлена догори (рис. 11.5).

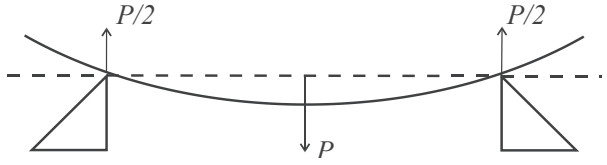


Рис.11.5. Деформація згину стержня, який вільно лежить на опорах і навантажений посередині вагою P.

Відповідно, стріла згину буде рівна:

$$\lambda = y(L) = \frac{PL^3}{4ab^3E} \qquad (11.21)$$

Тензор напружень

Для того, щоб визначити напруження в середовищі на довільно орієнтованій площадці поблизу заданої точки, розглянемо рух нескінченно малого тетраедра, який вирізаний з тіла поблизу цієї точки (рис. 11.6). Позначимо осі системи координат та проекції векторів на ці осі відповідними індексами: 1, 2, 3. Позначимо: dS – площа грані АВС, dS_1 – площа грані ОВС, dS_2 – площа грані ОВА, dS_3 – площа грані ОАС.

Рівняння руху тетраедра матиме вигляд:

$$m\vec{a} = \vec{f} + \vec{\sigma}_v dS + \vec{\sigma}_1' dS_1 + \vec{\sigma}_2' dS_2 + \vec{\sigma}_3' dS_3 , \qquad (11.22)$$

де m – маса тетраедра, $\vec{a}$ – його прискорення, $\vec{f}$ – об'ємні сили (наприклад сила тяжіння), $\vec{\sigma}_v dS$, $\vec{\sigma}_1' dS_1$, $\vec{\sigma}_2' dS_2$, $\vec{\sigma}_3' dS_3$ – сили, які діють на тетраедр з боку середовища. Якщо виконати граничний перехід – стягнути тетраедр ОАВС в точку (його об'єм і маса будуть прямувати до 0), тоді доданки $m\vec{a}$ і $\vec{f}$ теж прямуватимуть

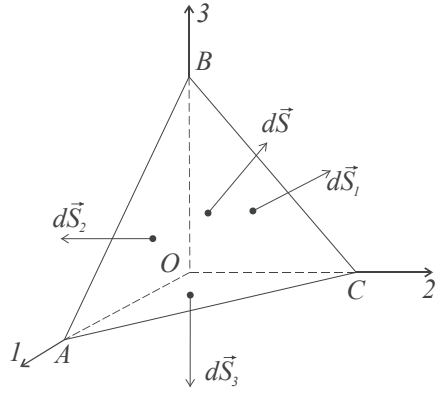


Рис. 11.6.

до нуля, оскільки вони пропорційні до об'єму. Умова рівноваги всіх сил, які діють на тетраедр, матиме вигляд:

$$\vec{\sigma}_v dS - \vec{\sigma}_1 dS_1 - \vec{\sigma}_2 dS_2 - \vec{\sigma}_3 dS_3 = 0 , \qquad (11.23)$$

де $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$, $\vec{\sigma}_3$ – напруження, які виникають в середовищі внаслідок дії зовнішніх сил. Поділимо вираз (11.23) на dS і зробимо позначення $\nu_1 = dS_1/dS$, $\nu_2 = dS_2/dS$, $\nu_3 = dS_3/dS$ – направляючі косинуси нормалі до площадки:

$$\vec{\sigma}_v = \vec{\sigma}_1 \nu_1 + \vec{\sigma}_2 \nu_2 + \vec{\sigma}_3 \nu_3 . \qquad (11.24)$$

Як видно з (11.24), три вектори $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$ і $\vec{\sigma}_3$ визначають вектор $\vec{\sigma}_v$ – напруження на довільній площадці з нормаллю $\vec{\nu}$. Кожен із цих векторів може бути розкладений на три компоненти-проекції на відповідні осі координат:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1 &= \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{\sigma}_2 &= \sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3 , \\ \vec{\sigma}_3 &= \sigma_{13}\vec{e}_1 + \sigma_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (11.25)$$

де $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – одиничні вектори осей координат. Компоненти з однаковими індексами σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} – нормальні до площадки

напруження, а з різними індексами – тангенційні напруження. Якщо підставити (11.25) в (11.24), то отримаємо:

$$\vec{\sigma}_\nu = (\sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3)\nu_1 + (\sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3)\nu_2 + \\ + (\sigma_{13}\vec{e}_1 + \sigma_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3)\nu_3 \ . \qquad (11.26)$$

Щоб знайти проекції вектора $\vec{\sigma}_\nu$ на відповідні осі координат, помножимо скалярно вираз (11.26) на відповідні одиничні вектори, наприклад проекція на вісь *ox*: $\sigma_{\nu 1} = \vec{\sigma}_\nu \cdot \vec{e}_1$, оскільки $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ є взаємно перпендикулярними векторами. Тому доданки, які містять добутки $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)$, $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)$ та $(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)$ будуть рівні нулю, а отже:

$$\begin{aligned} \sigma_{1\nu} &= \sigma_{11}\nu_1 + \sigma_{12}\nu_2 + \sigma_{13}\nu_3 \\ \sigma_{2\nu} &= \sigma_{21}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2 + \sigma_{23}\nu_3 \\ \sigma_{3\nu} &= \sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3 \end{aligned} \qquad (11.27)$$

Сукупність дев'яти величин, за допомогою яких можна записати проекції вектора напруження, називають **тензором напружень *T***:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \qquad (11.28)$$

Властивості тензора напружень:

1. тензор напружень є симетричним, тобто $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$;
2. оскільки тензор напружень є симетричним, то можна вибрати таку систему координат, щоб всі недіагональні елементи були рівні нулю, тобто $\sigma_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. У цій системі координат напруження в кожній точці характеризується лише трьома числами. Такі координатні осі називають головними осями тензора напружень.

Зв'язок між напруженнями та деформаціями

Розглянемо однорідне ізотропне тіло, яке має форму прямокутного паралелепіпеда, до протилежних граней якого, перпендикулярно до них, прикладені сили F_x, F_y, F_z. Направимо координатні осі паралельно ребрам паралелепіпеда, нехай *x, y, z* –

довжини ребер. Під дією цих сил у тілі виникнуть відповідні напруження σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} (рис. 11.7). Визначимо деформації, які виникають під дією цих сил. Якби діяла тільки сила F_x, то ребро *x* отримало б приріст $\Delta_1 x$, який визначається як $\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{\sigma_{11}}{E}$. Якби діяла б тільки сила F_y, то ребра, перпендикулярні до *y,* зменшилися б, оскільки ребро *x* отримало б від'ємний приріст $\frac{\Delta_2 x}{x} = -\mu\frac{\sigma_{22}}{E}$. Аналогічно під дією тільки сили F_z ребро *x* отримає приріст $\frac{\Delta_3 x}{x} = -\mu\frac{\sigma_{33}}{E}$. Якщо всі сили діють одночасно, то відповідно до принципу суперпозиції малих деформацій, результуюче відносне видовження:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta_1 x}{x} + \frac{\Delta_2 x}{x} + \frac{\Delta_3 x}{x} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E}\right). \qquad (11.29)$$

Аналогічно обчислюються видовження для ребер паралелепіпеда вздовж ребер *y* та *z*:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta_1 y}{y} + \frac{\Delta_2 y}{y} + \frac{\Delta_3 y}{y} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E}\right), \qquad (11.30)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta_1 z}{z} + \frac{\Delta_2 z}{z} + \frac{\Delta_3 z}{z} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E}\right). \qquad (11.31)$$

Співвідношення (11.29) – (11.31) також дозволяють визначити зміну об'єму при довільній деформації і знайти зв'язок між модулем Юнга та модулем зсуву.

Відповідно, зміна об'єму паралелепіпеда під дією зовнішніх сил F_x, F_y, F_z:

$$\Delta V = \Delta(xyz) = \Delta xyz + x\Delta yz + xy\Delta z \ ,$$

а відносна зміна об'єму:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(xyz)}{xyz} = \frac{\Delta xyz}{xyz} + \frac{x\Delta yz}{xyz} + \frac{xy\Delta z}{xyz} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \\ = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ . \qquad (11.32)$$

Скористаємося виразами (11.29) – (11.31) і підставимо їх в (11.32):

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{E} - 2\mu\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{E} = \\ = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\,. \tag{11.33}$$

У випадку однорідного всебічного стиснення ($\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma$) формула (11.33) набуває вигляду:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{E}(1-2\mu)\sigma = \frac{\sigma}{K}\,; \qquad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \tag{11.34}$$

де K – модуль всебічного стиснення.

Під час деформації зсуву зміна об'єму тіла не відбувається ($\Delta V = 0$), а отже з (11.33) випливає, що повинні виконуватися умови:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0\,, \tag{11.35}$$

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} = 0\,. \tag{11.36}$$

Якщо застосувати цю умову до (11.29) – (11.31), отримуємо зв'язок між напруженнями та деформаціями у випадку деформації зсуву:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{11}\,,\quad \varepsilon_2 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{22}\,,\quad \varepsilon_3 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{33}\,. \tag{11.37}$$

Доведемо, що деформація, за якої виконуються співвідношення (11.35) і (11.36), є деформацією зсуву. Для цього розглянемо випадок, коли $x=y=z=l$ і $\sigma_{33}=0$. Тоді $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$ і $\sigma_{11}=-\sigma_{22}$. У цьому випадку деформацію зручно розглядати для паралелепіпеда *EFGH* (в його основі – квадрат зі стороною $a = l/\sqrt{2}$), повернутого відносно *ABCD* на кут 45° (рис. 11.7).

На сторони квадрата будуть діяти тільки дотичні (тангенційні) напруження T, зміну кута між сторонами квадрата можна виразити через відносне видовження довжин його діагоналей – одна діагональ збільшується, а інша на відповідну величину зменшується, оскільки $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$, тобто паралелепіпед *EFGH* зазнає деформації зсуву. Знайдемо кут зсуву. Враховуючи, що кути деформації малі $\left(\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\right)$, отримаємо:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{\varepsilon_1 l\cos 45^\circ}{2}}{\frac{l\cos 45^\circ}{2}} = \varepsilon_1\,. \tag{11.39}$$

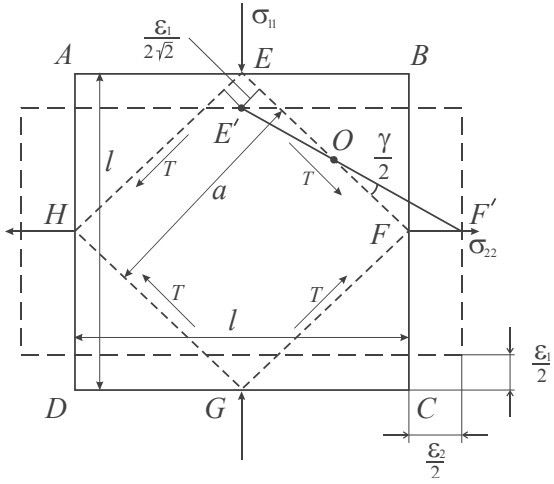


Рис. 11.7.

Знайдемо зв'язок між нормальним σ_{11} та тангенційним T напруженням. Сила F, яка діє на грань *AB*, та сили F', які діють на грані *EH* та *EF*, визначаються як добуток напруження на площу грані:

$$F = \sigma_{11}l^2\,,\quad F' = Tla = T\frac{l^2}{\sqrt{2}}\,. \tag{11.40}$$

Як видно з малюнку, повинна виконуватися векторна рівність $\vec{F}=\vec{F}'+\vec{F}'$, або в проекціях на напрямок дії σ_{11}:

$F = F'\cos 45^\circ + F'\cos 45^\circ$. З урахуванням (11.40) отримаємо $\sigma_{11} l^2 = T\frac{l^2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + T\frac{l^2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}$, а отже:

$$\sigma_{11} = T\,. \qquad (11.41)$$

З урахуванням (11.37), (11.39) і (11.41) знайдемо зв'язок між кутом зсуву та напруженнями:

$$\gamma = \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_{11} = \frac{2(1+\mu)}{E}T\,. \qquad (11.42)$$

З урахуванням закону Гука для деформації зсуву ($T = G\cdot\gamma$) можна встановити зв'язок між модулем Юнга та модулем зсуву:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}\,. \qquad (11.43)$$

Як видно з формул (11.15), (11.34) та (11.43), модулі кручення, всебічного стиснення та зсуву можуть бути вираженні через модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона, тому за допомогою цих параметрів середовища можна описувати будь-який вид пружної деформації.

Опис експериментальної установки

Експериментальне визначення модуля Юнга пружного матеріалу проводиться за допомогою приладу Лермантова (рис. 11.8) шляхом вимірювання відносного видовження металевої дротини. Прилад складається з двох кронштейнів А і Б, які розташовані один над одним і використовуються для закріплення дротини довжиною l, яка досліджується. Оскільки видовження дротини дуже маленьке, то для його вимірювання використовується оптична система, яка складається з освітлювача Л та поворотного дзеркала Д. Дзеркало Д закріплене на поворотному важелі В, який спирається на циліндр Ц. Під дією навантаження (важки Т) дротина видовжується і важіль В повертається навколо осі О. Разом із важелем повертається дзеркало Д, внаслідок чого світловий пучок, який випромінюється освітлювачем Л, зміститься на шкалі Ш.

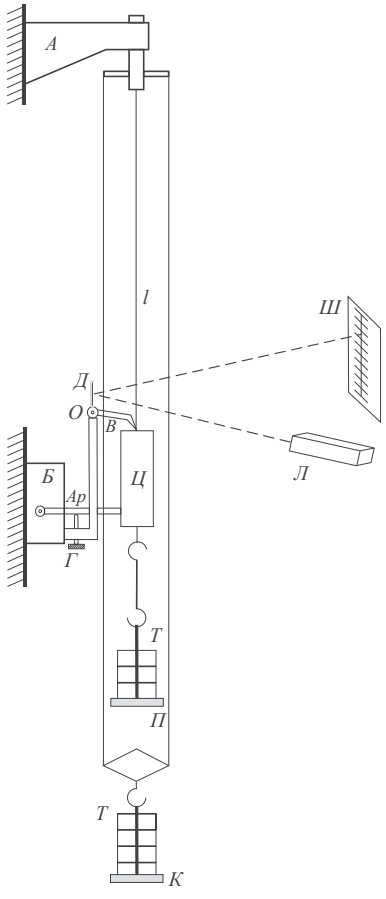


Рис. 11.8. Схема приладу Лермантова.

При видовженні дротини на Δl дзеркало повернеться на кут α. При цьому буде виконуватися співвідношення:

$$tg\alpha = \frac{\Delta l}{b}\,, \qquad (11.44)$$

де b – довжина важеля В. Довжину важеля В вибирають такою, щоб виконувалося співвідношення $\Delta l/b \ll 1$, тоді $tg\alpha \approx \alpha$. Поворот дзеркала може бути виміряний за зміною положення світлового

пучка на шкалі Ш. Якщо дзеркало повертається на кут α, то відбитий промінь повернеться на кут 2α. Якщо світловий пучок зміщується на шкалі Ш на відстань Δn, то можна записати:

$$tg\,2\alpha \approx 2\alpha = \frac{\Delta n}{D}, \qquad (11.45)$$

де D – відстань від дзеркала Д до шкали Ш. Використовуючи формули (11.44) та (11.45), знайдемо видовження дротини:

$$\Delta l = \frac{\Delta n}{2D} b. \qquad (11.46)$$

Нижній кронштейн Б має аретир Ар, який використовується для зняття навантаження з дротини. Важки, які потрібні для навантаження дротини, знаходяться на підвісі К, який прикріплений до верхнього кронштейну А. Для навантаження дротини важки В послідовно перекладають з підвісу К на підвіс П. Тим самим забезпечується постійне навантаження та незмінна стріла згину верхнього кронштейну А. Навантаження та розвантаження дротини потрібно проводити при піднятому аретирі Ар (гвинт Г) закручений.

Вимірювання

Перед початком вимірювання за допомогою лінійки вимірюють відстань D – відстань від дзеркала Д до шкали Ш, після цього шкалу Ш та освітлювач Л не рухають. Довжина та діаметр дротини і довжина важеля В є параметрами приладу, їх значення наведені в таблиці біля установки.

Послідовно навантажуючи дротину важками (на кожному з них вказано його масу; навантаження дротини є вага усіх важків, які в цей час знаходяться на підвісі П), проводять вимірювання переміщення світлового пучка відносно початкового положення. Результати вимірювання заносять у таблицю 11.1.

Серію вимірювань повторюють не менше 3-х разів. Після проведення вимірювань розраховують середні значення зміщення для однакового навантаження. Видовження дротини розраховують за формулою (11.46), а напруження розраховують за формулою:

$$T = \frac{4mg}{\pi d^2}. \qquad (11.47)$$

Результати розрахунків заносять в таблицю.

Табл. 11.1.

№	Навантаження m, кг	Зміщення Δn, м					Середнє зміщення Δn	Напруження T, Па	Відносне видовження $\varepsilon = \Delta l / l$
1									
2									
N									

Експериментальні завдання

1. Використовуючи отримані значення напруження та відносного видовження, побудуйте графіки залежностей $T(\varepsilon)$ для навантаження та розвантаження відповідно, представивши експериментальні точки у вигляді хрестиків, розмах яких по висоті і ширині дорівнює подвоєним похибкам вимірювання. Перевірте чи є лінійною залежність напруження від відносного видовження в обох випадках.
2. Розрахуйте значення модуля Юнга. Для цього, використовуючи метод найменших квадратів, апроксимуйте експериментальні залежності $T(\varepsilon)$ функцією $T(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon$, в яких коефіцієнт E є шуканим модулем Юнга.
3. Оцініть похибки визначення модуля Юнга за формулою

$$\Delta E = \sqrt{\frac{1}{N-1} \frac{\sum_{i=1}^{N} (T_i - E\varepsilon_i)^2}{\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2}} \qquad (11.48)$$

для випадку навантаження і розвантаження.

4. Порівняйте значення модуля Юнга E_1 та E_2, отримані для навантаження і розвантаження, та знайдіть їх середнє значення $\overline{E}$.
5. Порівняйте отримане значення модуля Юнга $\overline{E}$ з табличним значенням, наведеним у довіднику фізичних величин. За результатами порівняння визначте матеріал, з якого виготовлено дротину.
6. Розрахуйте коефіцієнт пружності дротини.

Теоретичні завдання

1. Означення деформації твердого тіла, види деформації.
2. Сформулюйте закон Гука, вкажіть межі його застосування.
3. Знайдіть зв'язок між коефіцієнтом пружності та модулем Юнга.
4. Енергія пружної деформації.
5. Означення коефіцієнта Пуассона.
6. Деформація зсуву. Закон Гука для деформації зсуву. Зв'язок між модулем зсуву та модулем Юнга.
7. Деформація кручення. Закон Гука для деформації кручення. Зв'язок між модулем кручення та модулем Юнга.
8. Деформація згину. Стріла згину для однорідного стержня.
9. Тензор напружень та його властивості.
10. Зв'язок між тензором напружень та деформаціями в твердому тілі.
11. Поясніть принцип роботи приладу Лермантова. Виведіть розрахункові формули для абсолютного видовження та напруження.

Рекомендована література

1. «Общий физический практикум. Механика», под редакцией А. Н. Матвеева, Д. Ф. Киселева, // Москва, МГУ, 1991.
2. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Т. I. Механика» // Москва, Физматлит, 2006.

Робота № 12

ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСУ СПІВУДАРУ КУЛЬ ТА МОДУЛЯ ЮНГА

Мета роботи

1. Вивчення властивостей пружного удару.
2. Визначення модуля Юнга для деяких металів.

Опис експериментальної установки

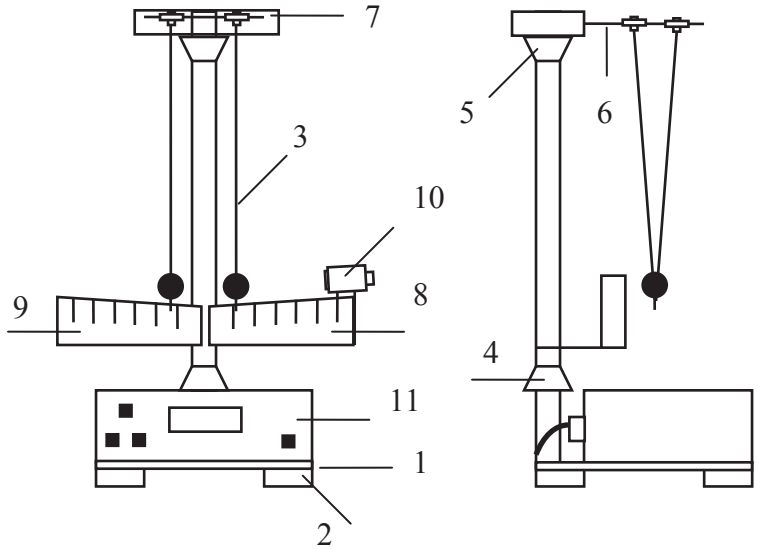


Рис. 12.1. Схема експериментальної установки.

Лабораторна установка наведена на рис. 12.1. На основі (2), що має чотири ніжки, висота яких може регулюватися, закріплена труба (3). На трубі (3) закріплені нижній кронштейн (4) і верхній кронштейн (5). За допомогою елементів (6) і (7), розміщених на верхньому кронштейні, можна змінювати відстань між кулями. На

нижньому кронштейні (4) закріплені рухомі шкали (8), (9) та електромагніт (10), який може рухатись вздовж шкали і висоту встановлення якого можна регулювати. На основі приладу (1) розміщено секундомір (11). У момент удару куль електричне коло замикається і секундомір (11) вимірює час, який кулі знаходяться у контакті. Ідея роботи базується на вимірюванні часу контакту куль під час зіткнення в залежності від початкового кута відхилення куль.

Перед увімкненням установки необхідно відрегулювати довжину підвісу куль так, щоб леза підвісу були на рівні кутових шкал, а риски на кулях були на одному рівні.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Сили пружності. Закон Гука

Сили пружності – сили, що виникають при пружний деформації тіл. Сили пружності протидіють деформації тіла і намагаються повернути йому початкову форму та розміри. Розглянемо стержень, виготовлений з деякого пружного матеріалу. Нехай його початкова довжина у недеформованому стані дорівнює l_0, а у деформованому стані – l. Величина $\Delta l = l - l_0$ називається ***абсолютною деформацією тіла***.

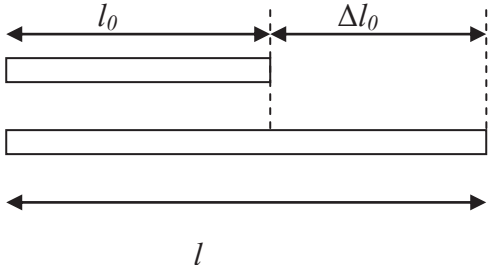


Рис. 12.2. Деформація стержня.

Англійський вчений Роберт Гук встановив, що ***сила пружності пропорційна абсолютній деформації тіла та направлена протилежно до напрямку деформації*** (закон Гука). Тоді модуль сили пружності визначається таким співвідношенням

$$F = k\Delta l, \qquad (12.1)$$

яке називають ***інтегральною формою запису закону Гука***. Тут k – ***коефіцієнт пружності***. Значення коефіцієнта пружності залежить як від типу матеріалу, з якого складається тіло, так і форми та розмірів тіла. Тому для опису пружних властивостей матеріалу при деформації розтягу та стиснення використовують іншу фізичну величину – ***модуль Юнга*** (E), який залежить лише від матеріалу та його фізичного стану. Закон Гука може бути записаний через модуль Юнга як

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad (12.2)$$

де

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad (12.3)$$

механічна напруга (сила F, прикладена до одиниці площі S) та

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \qquad (12.4)$$

відносна деформації тіла. Рівняння (12.2) називають ***диференціальною формою запису закону Гука.*** Як видно з (12.2), у системі одиниць СІ модуль Юнга вимірюється в Па.

Закон Гука не є універсальним, він справедливий лише для деформацій, при яких тіло набуває початкової форми і розмірів при знятті деформуючої сили. Такими деформаціями є тільки малі деформації ($|\varepsilon| \ll 1$).

Коефіцієнт Пуассона

При поздовжній деформації тіла (деформації розтягу-стиснення), його поперечні розміри також змінюються. Коефіцієнт Пуассона характеризує зміну поперечних розмірів ізотропного тіла при його поздовжній деформації. Якщо відносна деформація тіла у площині x складає ε_{xx}, а відповідна відносна

деформація тіла у площині y складає ε_{yy}, то коефіцієнт Пуассона визначається як відношення

$$\mu = \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \ . \qquad (12.5)$$

Коефіцієнт Пуассона може набувати значення від -1 до 0,5. Для більшості матеріалів коефіцієнт Пуассона лежить в межах від 0 до 0,5. Для абсолютно нестискуваного тіла $\mu = 0{,}5$.

Пружний та непружний удар

Удар – зміна стану тіл внаслідок короткочасної (частки секунди) їх взаємодії при зіткненні. Одним із найпростіших видів є ***центральний удар***, при якому тіла до удару та після нього рухаються вздовж однієї прямої. У випадку зіткнення куль ця пряма проходить через центри куль. Ця пряма або ***лінія удару*** – пряма, перпендикулярна до елемента поверхні зіткнення куль у момент удару.

Розглянемо замкнену систему, що складається з двох тіл, між якими відбувається центральний удар. Розрізняють ***пружні*** та ***непружні удари***. ***Пружним називається удар, при якому зберігається повна механічна енергія тіл, які зазнають зіткнення.*** Після пружного удару в тілах, що взаємодіють, не залишається жодних деформацій. Таким чином, при пружному ударі сили, що виникають, мають лінійно залежати від величини деформації. ***Непружним називається удар, внаслідок якого механічна енергія тіл, що зазнають удару, не зберігається,*** при цьому вона може як збільшуватись, так і зменшуватись. Важливим частинним випадком непружного удару є ***абсолютно непружний удар, після якого швидкості обох тіл, що зазнають зіткнення, стають однаковими, тобто після такого зіткнення тіла рухаються разом***. Якщо зазнають зіткнення вільні частинки, то при пружному ударі зберігаються і їх імпульс, і механічна енергія, у той час, як при непружному ударі зберігається їх імпульс, але не зберігається механічна енергія.

Потенціальна енергія деформації при зіткненні куль

Припустимо, що дві кулі одного і того ж радіусу R стиснені одна з одною деякою постійною силою F так, що їх центри зближені до відстані $2(R-h)$. З'ясуємо, якою є залежність сили взаємодії куль від величини деформації куль $F(h)$.

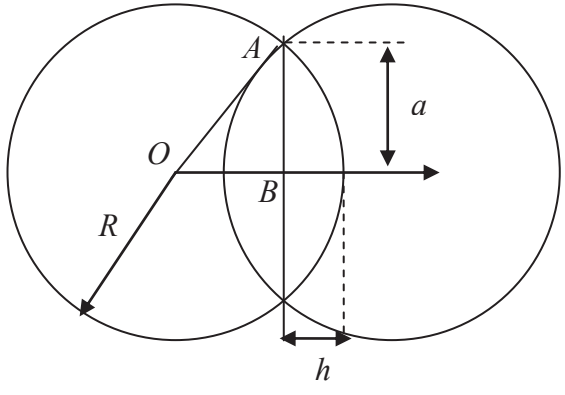


Рис. 12.3. Деформація куль при їх ударі

Кулі контактують одна з одною вздовж ділянки, що має форму кола. (рис. 12.3) Позначимо його радіус a. Оскільки йдеться про малі деформації, то можна припустити, що поверхня кожного з тіл, за винятком плоскої ділянки контакту, залишається сферичною. Тоді застосування теореми Піфагора до трикутника OAB дає: $(R-h)^2 + a^2 = R^2$ або

$$a^2 - 2Rh + h^2 = 0 \ . \qquad (12.6)$$

Членом h^2 можна знехтувати в порівнянні з $2Rh$, тож маємо

$$a = \sqrt{2Rh} \ . \qquad (12.7)$$

Насправді, поблизу місця контакту поверхні вже не є сферичними, тому вираз (12.7) дає дещо завищене значення a. Більш точним є наступне співвідношення:

$$a \approx \sqrt{Rh} \ . \qquad (12.8)$$

Справедливим є припущення, що на достатньо великих відстанях від місця контакту матеріал залишається недеформованим. Область, де локалізовано всі деформації, звичайно, не має чіткої межі, але вона є дзеркально-симетричною, площа її поперечного перерізу $\approx a^2$, а радіус $\approx a$.

Отже, шукану силу можна оцінити за законом Гука, переписавши (12.2) у вигляді

$$\frac{F}{S} = k\frac{\Delta l}{l_0}. \qquad (12.9)$$

Абсолютна деформація: $\Delta l \approx h$; площа перерізу деформованої області тіла: $S \approx a^2$. Тоді

$$F \approx Ea^2\frac{h}{a} \approx Eh^{3/2}R^{1/2}. \qquad (12.10)$$

Отриманий вираз можна переписати як

$$F = \eta Eh^{3/2}R^{1/2}, \qquad (12.11)$$

де η – додатній коефіцієнт. Ця формула (разом з відповідним чисельним коефіцієнтом η) була знайдена Герцем у 1887 році. Видно, що сила пружності не є лінійно пропорційною абсолютній деформації. Це легко пояснити, адже зі зростанням h деформації протидіє все більш широка ділянка перерізу кожної з куль.

Згідно з (2.11) F є функцією деформації h, отже легко можна знайти потенціальну енергію деформації кулі U. Вона дорівнює роботі, яку сила F виконує над кулею, збільшуючи деформацію від нуля до h, тобто

$$U_{пр} = \int_0^h F(h)\,dh. \qquad (12.12)$$

Інтегруючи отримаємо:

$$U_{пр} = kh^{5/2}, \qquad (12.13)$$

де $k = \frac{4}{1-\mu^2}E\sqrt{\frac{R}{2}}$; E – модуль Юнга, μ – коефіцієнт Пуассона, R – радіус куль.

Зв'язок між часом співудару куль та їх модулем Юнга

Розглянемо зіткнення двох абсолютно пружних однакових куль. Нехай у початковий момент часу одна з куль відхилена від положення рівноваги на кут α, тоді її механічна енергія дорівнює потенціальній енергії у полі сили тяжіння

$$E = U_g = mgl(1-\cos\alpha) = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (12.14)$$

де l – довжина нитки підвісу, m – маса кулі. Якщо кут відхилення α малий, то $\sin\alpha/2 \approx \alpha/2$ і вираз (12.14) набуде вигляду

$$E = U_g = \frac{1}{2}mgl\alpha^2. \qquad (12.15)$$

Під час руху потенціальна енергія кулі перетворюється в кінетичну, і на початок удару механічна енергія кулі, що налітає, дорівнюватиме її кінетичній енергії

$$E = T = \frac{m\upsilon_0^2}{2}. \qquad (12.16)$$

Під час зіткнення обидві кулі деформуються, внаслідок чого їх центри наближаються на відстань $2h$ (рис. 12.3). При цьому кожна з куль, рухаючись зі швидкістю υ, матиме кінетичну енергію $\frac{m\upsilon^2}{2}$ та потенціальну енергію пружної деформації $U_{пр}$. У системі центра мас куль, з урахуванням симетрії задачі, швидкість куль однакова

$$\upsilon = \frac{dh}{dt}. \qquad (12.17)$$

Тоді рівняння закону збереження енергії для двох куль при їх деформації матиме вигляд

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = 2\left(\frac{m\upsilon^2}{2} + U_c\right), \qquad (12.18)$$

звідки, враховуючи (12.13) і (12.17), отримуємо рівняння для h:

$$2\left(\frac{m}{2}\left(\frac{d^2h}{dt^2}\right)^2 + kh^{5/2}\right) = \frac{m\upsilon_0^2}{2}. \qquad (12.19)$$

Максимальне зближення куль відбувається в момент часу, коли швидкості кожної з них $\upsilon = \frac{dh}{dt} = 0$. Враховуючи це, з (12.19) знаходимо:

$$h_0 = \left(\frac{m\upsilon_0^2}{4k}\right)^{2/5}. \qquad (12.20)$$

Тривалість співудару τ – це час, протягом якого точка максимальної деформації кулі проходить у системі центра мас шлях від 0 до h_0 і назад:

$$dt = \frac{dh}{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \tau = 2\int_0^{h_0} \frac{dh}{\upsilon}. \qquad (12.21)$$

Знаходячи з (12.19) вираз для швидкості кулі в довільний момент її деформації $\upsilon = \left(\frac{\upsilon_0^2}{2} - \frac{2k}{m}h^{5/2}\right)^{1/2}$ вираз (12.21) можна записати у вигляді

$$\tau = 2\int_0^{h_0}\left(\frac{\upsilon_0^2}{2} - \frac{2k}{m}h^{5/2}\right)^{-1/2} dh. \qquad (12.22)$$

Переходячи до нової змінної $z = h\left(\frac{4k}{m\upsilon_0^2}\right)^{2/5}$, вираз (12.22) можна записати як

$$\tau = \left(\frac{m^2}{2^{3/2}k^2\upsilon_0}\right)^{1/5}\int_0^1 \left(1 - z^{5/2}\right)^{-1/2} dz. \qquad (12.23)$$

Із таблиць інтегралів маємо:

$$\int_0^1 \left(1 - z^{5/2}\right)^{-1/2} dz = 1{,}47. \qquad (12.24)$$

Тоді

$$\tau = 1{,}47\left(\frac{m^2}{2^{3/2}k^2\upsilon_0}\right)^{1/5}, \qquad (12.25)$$

а враховуючи вирази для k і υ_0, отримані вище, для часу співудару куль отримаємо

$$\tau = 1{,}47R\left[\left(\pi\rho\frac{1-\mu^2}{3E}\right)^2 \frac{1}{\left(2gl\alpha^2\right)^{1/2}}\right]^{1/5}. \qquad (12.26)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно E, отримуємо:

$$E = \frac{\pi\rho\left(1-\mu^2\right)}{\left(2gl\alpha^2\right)^{1/4}}\left(\frac{1{,}47R}{\tau}\right)^{5/2}. \qquad (12.27)$$

ВИМІРЮВАННЯ

У роботі визначається модуль Юнга металу, з якого виготовлені кулі, за допомогою виразу (12.27). У роботі необхідно провести такі вимірювання.

1. Штангенциркулем виміряти діаметри $2R$ куль. Виміри повторити три рази.
2. Лінійкою виміряти довжину підвісу l. Виміри повторити три рази.
3. Відхиляючи одну з куль від положення рівноваги (друга куля – у стані спокою) на різні кути від 1° до 15°, виміряти залежність часу співудару τ від величини кута α. Виміри потрібно виконувати через 1°. Для кожного значення кута α виміри повторити 3–5 разів, для розрахунків використовувати середнє значення τ. Величину кута α перевести у радіани.
4. Результати дослідів занести в таблицю 12.1.

Табл. 12.1

α, ^{o}	α, рад	τ_i, мкс	$\langle\tau\rangle$, мкс

Експериментальні завдання

1. За результатами вимірів в координатах $x=\ln\alpha$, $y=\ln\tau$ побудувати графік $\ln\tau=f\left(\ln\alpha\right)$.
2. За методом найменших квадратів апроксимувати отриману експериментальну залежність лінійною функцією $\ln\tau=a-\frac{1}{5}\ln\alpha$. Знайти точку перетину прямої з віссю ординат $a=\ln A$.
3. Розрахувати модуль Юнга (значення густини ρ та коефіцієнта Пуассона μ для відповідного матеріалу беруть з таблиць) за формулою:

$$E=\frac{\pi\rho\left(1-\mu^2\right)}{\left(2gl\right)^{1/4}}\left(\frac{1,47R}{A}\right)^{5/2}. \qquad (12.28)$$

4. Оцінити похибку величини отриманого значення модуля Юнга (з урахуванням похибок вимірювань R та l).
5. Порівняти отримане значення модуля Юнга з табличним значенням. У разі суттєвої (більше, ніж величина довірчого інтервалу) відмінності цих значень пояснити такий результат.

Теоретичні завдання

1. Сформулюйте закон збереження механічної енергії для системи частинок.
2. Дайте означення пружного, непружного та абсолютно непружного удару.

3. Сформулюйте закон Гука в інтегральній та диференціальній формах. Що таке модуль Юнга?
4. Що таке коефіцієнт Пуассона?
5. Дайте означення пружної, непружної та пластичної деформацій.
6. Отримайте формулу для потенціальної енергії пружної деформації куль за Герцем (формула (12.13)).
7. Отримайте робочу формулу (12.27) для визначення модуля Юнга.

Рекомендована література

1. О.В.Слободянюк. «Механіка»: електронна версія // Київ, 2013.
2. Общий физический практикум. Механика / Под ред. А.Н.Матвеева: М., 1991, - 272 с.
3. Сивухин Д.В.. Общий курс физики Механика. т. I М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, - 560 с.
4. Стрелков С.П. Общий курс физики Механика. т. I М.: Наука, 1975, - 560 с.

РОБОТА №13

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗВУКУ УПОВІТРІ

Мета роботи

1. Визначити швидкість поширення звукових хвиль у повітрі методом акустичного резонансу.
2. Дослідити власні частоти коливань повітряного стовпа різної довжини.

Опис експериментальної установки

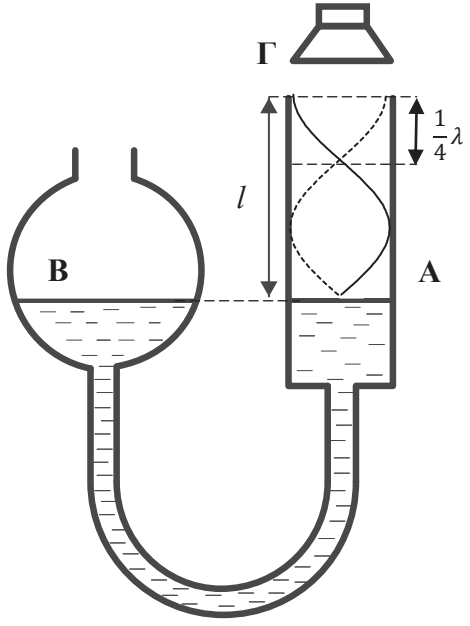


Рис.13.1 Схема трубки Квінке

Прилад для визначення швидкості звуку в повітрі, який називають трубкою Квінке, складається з двох сполучених гумовою трубкою посудин А і В (рис. 13.1). Посудина А – скляна циліндрична трубка довжиною до 1 м і діаметром 3–4 см. Поблизу відкритого кінця трубки А розміщено невеликий гучномовець Г, який приєднано до звукового генератора (на рисунку не показано).Плоска мембрана гучномовця при її коливаннях з частотою змінної напруги, що подається від звукового генератора,створює у трубці поздовжні звукові хвилі частотиν.Висоту l повітряного стовпа в трубці А можна змінювати піднімаючи або опускаючи колбу В. При певних значеннях l у ньому можуть утворюватися стоячі хвилі, які й досліджуються в цій роботі.

Теоретичні відомості

Пружні хвилі. Хвильове рівняння та рівняння хвилі

У пружному середовищі можливим є виникнення коливань частинок цього середовища. Процес поширення таких коливань у просторі називається ***хвилею.*** Якщо частинки середовища коливаються у напрямку розповсюдження хвилі, то такі коливання називають ***поздовжніми*** хвилями, а якщо в напрямку перпендикулярному до напрямку розповсюдження хвилі, то ***поперечними***. ***Поздовжні хвилі пов'язані з об'ємною деформацією*** пружного середовища і тому можуть поширюватися у будь-яких середовищах – у твердих тілах, рідинах, газах. ***Механічні поперечні хвилі пов'язані з деформацією зсуву*** пружного середовища і тому можуть виникати і поширюватися лише в середовищах, які мають пружність форми, тобто у твердих тілах. Зауважимо, що сказане вище стосується хвиль, що поширюються в об'ємі середовища. На межі розділу будь-яких середовищ, зокрема рідин і газів, можливе виникнення ***поверхневих хвиль***, у процесі поширення яких беруть участь лише приповерхневі частинки середовищ, що межують. ***Такі хвилі є поздовжньо-поперечними***, оскільки частинки середовища при їх коливаннях мають складову швидкості як паралельну, так і перпендикулярну до напрямку поширення хвилі. Прикладом поверхневих хвиль є капілярні та гравітаційні хвилі на поверхні води.

Одним з різновидів пружних хвиль є ***звукові*** або ***акустичні*** хвилі. Звукові хвилі з частотами в інтервалі $16 – 2\cdot10^4$ Гц, які сприймаються органом слуху людини, називаються звуком, з частотою $\nu < 16$ Гц – інфразвуком, а з частотами $\nu > 2\cdot10^4$ Гц – ультразвуком.

Розглянемо загальні властивості хвиль. Нехай деяке збурення (наприклад, величина ***зміщення*** ξ частинок середовища з

положення рівноваги) поширюється в однорідному середовищі зі сталою швидкістю υ. Розповсюдження такого збурення можна описати функцією

$$\xi(z,t) = \xi\left(t - \frac{z}{\upsilon}\right), \qquad (13.1)$$

де z – відстань, яку пройшло збурення за проміжок часу від 0 до t у напрямку, що збігається з напрямком вектору швидкості $\vec{\upsilon}$. Дійсно, певне значення величини ξ відповідає певному значенню аргументу $(t - \frac{z}{\upsilon})$. Це значення величини ξ буде залишатися незмінним лише тоді, коли незмінною буде залишатися величина цього аргументу, а саме, коли

$$t - \frac{z}{\upsilon} = const\,. \qquad (13.2)$$

Якщо взяти перші та другі похідні за координатою z та за часом t від виразу (13.1) і виконати певні математичні перетворення (детальніше див. розділ 8[1]), то можна переконатися, що функція $\xi(z,t)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad (13.3)$$

Це рівняння називається ***хвильовим рівнянням***. Найпростішим розв'язком рівняння (13.3) буде функція, що описує так звану ***плоску біжучу гармонічну хвилю***:

$$\xi(z,t) = \xi_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right], \qquad (13.4)$$

де ξ – зміщення точки, положення якої у просторі задається координатою z, в момент часу t, ξ_0 – амплітуда хвилі – додатно визначена величина, що дорівнює модулю максимального зміщення, $\xi_0 = |\xi_{max}|$, а вираз у квадратних дужках – ***фаза хвилі***, яка за $t = 0$ і $z = 0$ дорівнює ***початковій фазі*** φ_0. Розв'язок (13.4) називається ***рівнянням хвилі***(не плутати з ***хвильовим рівнянням***).

Якщо в рівнянні (13.4) зафіксувати певне значення координати $z = z_0 = \text{const}$, то воно перейде в рівняння коливань частинки навколо положення рівноваги в точці z_0:

$$\xi(z_0,t) = \xi_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z_0}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right]. \qquad (13.5)$$

На рис. 13.2 зображено графік $\xi(z_0,t)$ залежності зміщення частинки, що бере участь у хвильовому русі, від часу. Ця залежність являє собою гармонічну періодичну функцію часу з періодом T.

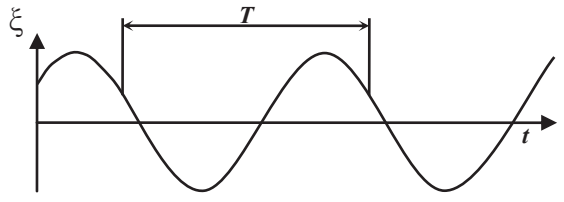


Рис. 13.2 Залежність зміщення $\xi(z_0,t)$ в точці $z = z_0$ від часу**.**

Якщо в рівнянні (13.4) зафіксуємо певне значення часу $t = t_0$, то отримаємо просторовий розподіл (миттєвий знімок) зміщення частинок у плоскій хвилі в один і той самий момент часу $t = t_0$

$$\xi(z,t_0) = \xi_0 \cos\left[\omega\left(t_0 - \frac{z}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right]. \qquad (13.6)$$

Графік цієї залежності наведено на рис. 13.3. Вона являє собою гармонічну періодичну функцію координати z з просторовим періодом $\lambda = \nu T$, який називають ***довжиною хвилі***, і який дорівнює відстані, яку проходить хвиля за час, що дорівнює одному періоду коливань частинок середовища,або, іншими словами, відстань між двома точками простору, різниця фаз між коливаннями в яких становить 2π.

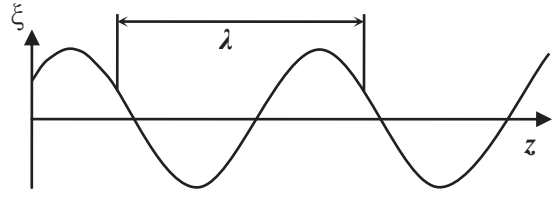


Рис. 13.3Залежність зміщення від координати

Рівнянню плоскої гармонічної хвилі (13.4) можна надати симетричного вигляду щодо змінних t та z, уведенням так званого ***хвильового числа*** $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon}$:

$$\xi(z,t) = \xi_0 \cos[\omega t - kz + \varphi_0]. \qquad (13.7)$$

Рівняння плоскої біжучої гармонічної хвилі (13.7)описує хвилю, що поширюється в додатному напрямку осі z. Якщо хвиля поширюється у довільному напрямку, то (13.7) можна узагальнити до вигляду

$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \cos\left[\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right], \qquad (13.8)$$

де $\xi(\vec{r},t)$ – зміщення точки, положення якої у просторі задається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$; ξ_0–***амплітуда*** хвилі; $\vec{k}$ – ***хвильовий вектор***, що визначає напрямок поширення плоскої хвилі; модуль хвильового вектора дорівнює $\left|\vec{k}\right| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, де λ – довжина хвилі.

З умови сталості фази $\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0 = const$ плоскої гармонічної хвилі (13.8) можна отримати рівняння ***поверхні однакових фаз***(або ***хвильової поверхні***) як геометричного місця точок простору, де коливання мають однакову фазу у вигляді $\vec{k}\vec{r} = \text{const} + \omega t$.

Хвильовим фронтом називається поверхня, що є геометричним місцем точок, що коливаються з однаковою фазою. Залежно від форми хвильового фронту розрізняють плоскі хвилі, сферичні хвилі і т.д. Функція (13.8) описує саме плоску біжучу хвилю.

Шляхом обчислення і порівняння других похідних за координатами x, y, z і за часом t від зміщення (13.8) можна отримати хвильове рівняння для довільного напрямку поширення плоскої хвилі

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 \text{ або } \Delta\xi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0, \qquad (13.9)$$

де символом Δ позначено ***оператор Лапласа***, який у декартових прямокутних координатах має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (13.10)$$

Хвильове рівняння є одним із основних рівнянь фізики, що описує поширення хвиль різної фізичної природи. Замість просторового зміщення частинки ξ у цьому рівнянні можуть стояти тиск, густина, електрична поляризація або намагніченість одиниці об'єму речовини, вектор напруженості електричного поля, вектор магнітної індукції та багато інших фізичних величин.

Стоячі акустичні хвилі

Як і всякому хвильовому процесу, звуковим хвилям властиве ***явище інтерференції*** –взаємне підсилення хвиль в одних точках простору і послаблення в інших, залежно від співвідношення між фазами цих хвиль. Явище інтерференції можна спостерігати при просторовому накладанні принаймні двох хвиль. Окремим випадком інтерференції є ***стоячі хвилі***. ***Стоячі хвилі*** можна розглядати як результат інтерференції двох біжучих хвиль, що поширюються одна назустріч одній, з **однаковими** амплітудами і частотами (для поперечних хвиль ще і з **однаковою** поляризацією). Зазвичай стоячі хвилі утворюються при інтерференції біжучої хвилі, що розповсюджується до межі поділу двох середовищ, з хвилею відбитою від цієї межі.

Розглянемо хвилю, що поширюється у додатному напрямку осі z з початковою фазою $\varphi_0 = 0$:

$$\xi_1 = \xi_0 \cos(\omega t - kz). \qquad (13.11)$$

Хвиля, яка поширюється у від'ємному напрямку осі z (відбита хвиля), у випадку повного відбивання описується виразом

$$\xi_2 = \xi_0 \cos(\omega t + kz). \qquad (13.12)$$

Внаслідок інтерференції цих двох хвиль у середовищі утворюється стояча хвиля:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \cos\left(\omega t - kz\right) + \xi_0 \cos\left(\omega t + kz\right) = 2\xi_0 \cos kz \cos\omega t \qquad (13.13)$$

або

$$\xi = 2\xi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)\cos\omega t = A(z)\cos\omega t, \qquad (13.14)$$

де $A(z)=2\xi_0\cos(kz)$ –***амплітуда стоячої хвилі*** яка, як видно, залежить від координати z .

З аналізу виразу (13.14), можна зробити висновок, що в точках, де

$$\frac{2\pi}{\lambda}z=\pi n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ ...), \tag{13.15}$$

амплітуда стоячих хвиль максимальна і дорівнює $2\xi_0$. Ці точки називаються ***пучностями*** стоячої хвилі. У точках, де

$$\frac{2\pi}{\lambda}z=(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n=0,\ 1,\ 2,...), \tag{13.16}$$

амплітуда стоячої хвилі дорівнює 0. Ці точки називаються ***вузлами*** стоячої хвилі. З рівнянь (13.15) та (13.16) видно, що відстань між сусідніми вузлами (та сусідніми пучностями) становить *λ/2*, а відстань між сусідніми пучністю та вузлом – *λ/4*, тобто чверть довжини хвилі.

Якщо взяти похідні за координатою z та за часом t від функції $\xi(z,t)$з рівняння (13.14), то можна знайти просторові розподіли, відповідно, величини деформації середовища ε та швидкості коливного руху частинок$\dot{\xi}$:

$$\varepsilon=\frac{\partial\xi}{\partial z}=-2\frac{2\pi}{\lambda}\xi_0\sin 2\pi\frac{z}{\lambda}\cos\omega t, \tag{13.17}$$

$$\dot{\xi}=\frac{\partial\xi}{\partial t}=-2\omega\xi_0\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\frac{z}{\lambda}\sin\omega t. \tag{13.18}$$

Рівняння (13.17) описує стоячу хвилю деформації, а рівняння (13.18) – стоячу хвилю швидкості. З вигляду цих рівнянь видно, що вузли та пучності швидкості частинок співпадають з вузлами та пучностями зміщення, а вузли та пучності деформації знаходяться у протифазі(відрізняються за фазою на π) з вузлами та пучностями зміщення. Зауважимо, що все викладене вище повністю застосовне як для поздовжніх хвиль, так і для поперечних.

При вільних коливаннях стержнів, струн, стовпів газу в трубах, у них утворюються стоячі хвилі. Досліди і спостереження свідчать, що в жорстко закріплених точках стержнів і струн завжди

утворюються вузли зміщення (пучності деформації). Прикладами можуть бути поперечні коливання пружної дошки або балки, кінці якої спираються на нерухомі опори, а також струн різноманітних музичних інструментів. Натомість на вільних кінцях стержнів, що коливаються, спостерігаються пучності зміщення (вузли деформації). Прикладами можуть бути поперечні коливання пружної дошки-трампліну, який використовують для стрибків у воду, або коливання кінців камертона.

У цій лабораторній роботі виникнення стоячих хвиль може бути пояснено накладанням біжучої від гучномовця в напрямку поверхні води звукової хвилі і звукової хвилі, відбитої від поверхні води, що розповсюджується у зворотному напрямку. Зрозуміло, що зміщення і швидкість впорядкованого поздовжнього коливного руху молекул повітря[1] біля поверхні води дорівнює нулю. Це означає, що біля поверхні води розташовані вузли розподілів зміщення і швидкостей, а також пучність розподілу деформації. На відкритому кінці трубки поздовжній коливний рух молекул нічим не обмежений; понад це мембрана гучномовця періодично надає імпульс молекулам повітря, що спричинює їх впорядкований поздовжній коливний рух. Отже, тут треба очікувати пучність розподілів зміщень і швидкостей і вузол розподілу деформації.

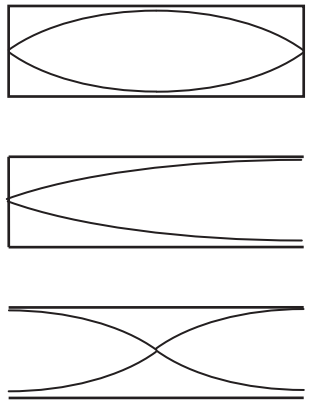


Рис.13.4 Стояча хвиля (основний тон) в резонаторі а) закритому з обох боків, б) відкритому з одного боку, в) відкритому з обох боків.

Взагалі, на межі двох середовищ, від якої відбивається хвиля, може утворитись або вузол, або пучність залежно від співвідношення густин середовищ, що межують. При відбиванні

[1]Це не стосується хаотичного теплового руху молекул.

біжучої хвилі від середовища з густиною більшою за густину середовища, в якому вона розповсюджується, утворюється відбита хвиля з фазою коливань протилежною щодо фази падаючої хвилі, що при додаванні коливань цих двох хвиль призводить до утворення на межі двох середовищ вузла зміщень (у навчальній літературі це явище іноді називають «втратою півхвилі»). При відбиванні біжучої хвилі від середовища з меншою густиною зміна фази не відбувається, і на межі двох середовищ унаслідок додавання коливань однакових фаз утворюється пучність зміщень (див. рис.13.4).

Таким чином, стоячі хвилі як стаціонарний просторовий розподіл вузлів та пучностей коливань в обмеженій довжиною l ділянці середовища можуть існувати лише за умови, що на цій довжині вкладається ціла кількість відстаней $\frac{\lambda}{4}$ між сусідніми вузлами і пучностями, тобто

$$l = (m+1)\frac{\lambda}{4} \qquad (13.19а)$$

або

$$(m+1)\lambda = 4l\,, \qquad (13.19б)$$

де $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

З умови (13.19б) випливає, що найбільша можлива довжина біжучих хвиль, які, поширюючись у протилежних напрямках, здатні в результаті додавання амплітуд створити стоячу хвилю, відповідає значенню $m = 0$ і становить $\lambda_{\text{макс}} = 4l$. З іншого боку, з умови (13.19а) випливає, що за заданої величини λ, довжина l не може бути меншою за $l_{\text{мін}} = \lambda/4$. Вираз (13.19б) відбиває фізичну суть умови утворення стоячих хвиль в обмеженому середовищі заданої довжини, оскільки визначає мінімальний шлях, який потрібен, щоб між біжучими хвилями, що поширюються у протилежних напрямках виникла різниця фаз, яка точно дорівнює 2π, і тим самим забезпечує повну відтворюваність просторового розподілу амплітуди коливань.

За парних $m = 2n$, де $n =$ 0, 1, 2, 3, …, умови (13.19а) і (13.19б)набирають вигляду

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad (13.20а)$$

або

$$(2n+1)\lambda = 4l\,, \qquad (13.20б)$$

а за непарних $m = 2n+1$, де $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, вигляду

$$l = (n+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (13.21а)$$

або

$$(n+1)\lambda = 2l\,. \qquad (13.21б)$$

Умова (13.20) відповідає випадку, коли граничні умови в обмеженій довжиною l ділянці середовища різні і на одній межі маємо пучність, а на іншій – вузол (рис. 13.4, б). Умова (13.21) відповідає випадку, коли граничні умови в обмеженій довжиною l ділянці середовища однакові і на обох межах маємо вузли (рис. 13.4, а) або пучності (рис. 13.4, в).

Оскільки у трубці Квінке (рис. 13.1) з одного кінця трубки маємо повітря, з іншого – воду, то доцільно скористатися виразом (13.20а), який буде визначати умову утворення стоячих хвиль у повітряному стовпі довжиною l: $l = (2n+1)\lambda/4$, де $n = 0,1,2,3,...$ Тоді, для частоти n-го власного коливання (n-го тону), враховуючи зв'язок між довжиною хвилі та її швидкістю

$$\upsilon = \lambda\nu\,, \qquad (13.22)$$

отримаємо:

$$\nu_n = \frac{(2n+1)\upsilon}{4l}\,. \qquad (13.23)$$

Таким чином, в трубці Квінке утворюються стоячі хвилі, частоти коливань яких можуть за заданої довжини повітряного стовпа l набувати лише **певних дискретних** значень, що визначаються умовою (13.23);такі частоти називаються ***власними частотами*** коливань повітряного стовпа. Коливання з найнижчою частотою ν_0, що відповідає $n = 0$, називається ***основним тоном***, а коливання з вищими частотами, що відповідають $n > 0$ – ***обертонами***.

У цій лабораторній роботі швидкість звуку в повітрі визначається з рівняння (13.21) за допомогою явища резонансу. ***Резонанс*** **–** значне зростання амплітуди коливань при співпадінні частоти зовнішньої сили і частоти власних коливань системи v_n. Плоска мембрана гучномовця (рис.13.1) коливається з частотою змінної напруги, що подається від звукового генератора, і створює у трубці поздовжні звукові хвилі частотиν.При співпадінні частоти, що створює генератор (частота зовнішньої сили) з однією з власних частот повітряного стовпа v_n, виникає явище резонансу, яке наше вухо сприймає як підсилення гучності звуку. Піднімаючи та опускаючи посудину В, ми можемо чути зміни гучності звуку. Після досягнення резонансу при деякій висоті повітряного стовпа, можна змінювати висоту l до досягнення наступного резонансу. Різниця висот Δl, які відповідають двом сусіднім резонансам, дорівнює $\lambda/2$ (відстань між сусідніми пучностями). Тоді, визначивши довжину звукової хвилі як $\lambda=2\Delta l$, і, знаючи частоту ν коливань звукового генератора, за формулою (13.22) знаходимо швидкість звуку у повітрі.

Швидкість звуку також можна виміряти, при постійній висоті l визначаючи різницю сусідніх власних частот, тобто

$$\Delta v_{n,n+1} = v_{n+1} - v_n = \frac{\big(2(n+1)+1\big)\upsilon}{4l} - \frac{(2n+1)\upsilon}{4l} = \frac{\upsilon}{2l}, \qquad (13.24)$$

звідки отримаємо

$$\upsilon = 2l\Delta v_{n,n+1}. \qquad (13.25)$$

Зауважимо, що стояча хвиля, на відміну від біжучої, не переносить енергію. Цього можна очікувати, оскільки її можна розглядати як суперпозицію двох біжучих хвиль, які переносять енергію в двох протилежних напрямках. Існує лише локальний рух енергії в ділянках обмежених сусідніми вузлами, пов'язаний з переходом кінетичної енергії в потенціальну і навпаки.

ВИМІРЮВАННЯ

1. Увімкнути звуковий генератор, дати йому прогрітися 2–3 хв.
2. Встановити частоту генератора в інтервалі 1000 Гц.
3. Змінюючи положення посудини В, отримати два послідовних положення рівня води у трубці А, при яких буде фіксуватися акустичний резонанс у повітряному стовпів трубці (підсилення звуку), і виміряти відстань між цими положеннями Δl, тобто знайти довжину півхвилі $\lambda/2$. Виміри провести для всіх почутих послідовних резонансів змінюючи положення посудини В у максимально можливих межах. Визначити середнє значення $<\lambda>$. Виміри записати до таблиці 13.1.

Табл.13.1

Номер виміру	ν, Гц	Δl, *см*	λ, м	$<\lambda>$, м	$\Delta\lambda$, м	v, м/с	Δv, м/с	ε, %
1	1000							
…								
N								
1	…							
…								

4. Повторити вимірювання згідно з пунктом 3 для 5 різних частот в інтервалі 800 – 1500 Гц.
5. Зафіксувати положення посудини В на рівні приблизно 1/3 від висоти трубки А (див. рис.13.1) і виміряти довжину повітряного стовпа l. Далі, змінюючи частоту генератора, визначити частоти, для яких буде спостерігатись резонанс (підсилення звуку). Записати знайдені експериментальні частоти ν_n та різниці сусідніх частот $\Delta\nu_{n,n+1}$ в таблицю 13.2. Виміри кожної частоти повторити 5 разів.

Табл. 13.2

Номер виміру	ν_n, Гц	$<\nu_n>$, Гц	$\Delta\nu_{n,n+1}$, Гц	v, м/с	Δv, м/с	ε, %

1						
…						
5						
1						
…						
5						

Експериментальні завдання

1. Користуючись визначеними у пункті 3 середніми значеннями довжини хвилі для відповідних частот генератора, за формулою (13.22) визначити швидкість поширення звуку в повітрі.
2. Використовуючи визначені в пункті 5 значення різниць частот $\Delta\nu_{n,n+1}$, а також значення висоти стовпа повітря l, за формулою (13.25) розрахувати швидкість звуку в повітрі. Результати записати до таблиці 13.2.
3. Обчислити абсолютну та відносну похибки вимірювання швидкості звуку в повітрі.
4. Обчислити відносне відхилення визначеної швидкості звуку від табличного значення при тиску 1 атм. та температурі 20^0C. Пояснити з чим може бути пов'язане відхилення експериментального значення від табличного.
5. За формулою $\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ розрахувати швидкість звуку у повітрі, де T – температура повітря (в К), $R = 8{,}31$ Дж/моль$\cdot$К – універсальна газова стала, γ = 1,4 – стала адіабати, μ=28 г/моль – молярна маса повітря. Отримане теоретичне значення порівняти з виміряним у роботі.

Теоретичні завдання

1. Загальний вигляд хвильового рівняння. Його розв'язок (рівняння хвилі) для плоскої біжучої хвилі. Фаза хвилі, частота, хвильовий вектор.
2. Дати означення поздовжніх та поперечних хвиль у пружному середовищі. З якими видами деформацій вони пов'язані?Звукова хвиля у повітрі – це поздовжня чи поперечна хвиля?
3. Що таке звук? Вказати діапазон частот звукових коливань, які сприймає вухо людини.
4. Що таке стоячі хвилі?Як вони утворюються?
5. Дати означення вузлів та пучностей стоячої хвилі. Чому дорівнюють відстані між сусідніми (а) вузлами, (б) пучностями, (в) вузлом і пучністю? Як пов'язані пучності та вузли зміщення з пучностями та вузлами деформацій та швидкості частинок? Намалювати малюнок.
6. Пояснити, чому відстань між двома сусідніми резонансами Δl в даному досліді дорівнює $\lambda/2$.
7. Що таке власні коливання стовпа повітря?Сформулювати умови виникнення стоячих хвиль у трубці Квінке. Вивести формулу (13.13) для власних частот акустичних коливань повітряного стовпа. Що таке основний тон, обертони?
8. Пояснити, чи буде в умовах даного досліду відбуватись перенесення енергії вздовж стовпа повітря. Відповідь обґрунтувати.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
2. И.В. Савельев, «Курс общей физики, том1. Механика. Колебания и волны. Молекулярная физика» // Москва, Наука, 1970.
3. «Физический практикум», под редакцией В.И. Ивероновой // Москва,Физматгиз, 1962.
4. Д.В. Сивухин, «Общий курс физики. Т. 1. Механика» // Москва, Наука, 1989.
5. А. Н. Матвеев, «Механика и теория относительности» // Москва, Высшая школа, 1986.

РОБОТА № 14

ВИВЧЕННЯ КОЛИВАНЬ ЗВ'ЯЗАНИХ МАЯТНИКІВ

Мета роботи

1. Дослідити типи нормальних коливань зв'язаних маятників.
2. Визначити умови спостереження явищ биття та резонансу.

Опис експериментальної установки

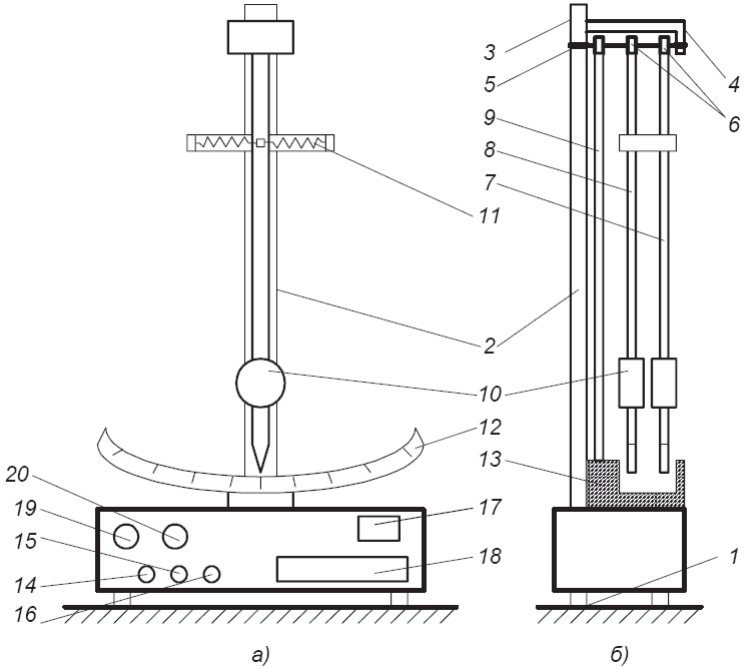


Рис. 14.1. Схема експериментальної установки.

Лабораторна робота виконується на експериментальній установці, зображеній на рис. 14.1. Основа 1 оснащена регульованими ніжками, що забезпечують вирівнювання приладу.

На основі 1 розміщена колона 2, на якій закріплені втулка 3 і кронштейн 4. На стержні 5 втулки знаходяться три кріплення 6, на яких за допомогою кулькових підшипників підвішені фізичні маятники 7, 8 і стержень 9. Цей стержень призначений для збудження вимушених коливань (зокрема спостереження явища резонансу). Для їх збудження необхідно з'єднати стержень із найближчим до нього маятником за допомогою пружинок. Уздовж маятників може переміщуватись і фіксуватися в потрібному положенні тягарець 10. Фізичні маятники 10 сполучені один з одним за допомогою двох пружин 11, які можна переміщувати вздовж стержня разом з їх кріпленнями. До нижнього кронштейну основи прикріплена кутова шкала 12, за допомогою якої визначається амплітуда коливань маятників.

На лицьовій панелі блоку управління та вимірювання знаходяться: клавіша 14 «СЕТЬ» для ввімкнення електроживлення приладу; клавіша 15 «СБРОС», призначена для приведення схеми блоку вимірів в початковий стан; клавіша «СТОП», натисканням якої процес вимірів припиняється. Ручка 19 призначена для ввімкнення двигуна, яка викликає вимушені коливання, а ручка 20 – для зміни їх частоти.

Теоретичні відомості

Зв'язані коливання. Синфазні та протифазні коливання

Кількість незалежних змінних (параметрів), якими можна описати рух системи частинок, називають кількістю її степенів вільності. Матеріальна точка має три степені вільності. Кількість степенів вільності фізичного або математичного маятника, що коливається в одній площині, рівна одиниці. Загалом, коливання таких маятників можуть одночасно відбуватися в двох взаємно перпендикулярних площинах, які проходять через точку підвісу. Для опису руху в такому випадку необхідні дві незалежні змінні, а маятник має дві степені вільності. Якщо система має кілька степенів вільності, то при малих відхиленнях від положення

рівноваги можливі одночасні коливання за всіма її ступенями. Якщо коливальні рухи, що відповідають кожному зі степенів вільності, не впливають один на одного, то для опису руху системи достатньо провести кінематичне додавання рухів. Сумарний рух при цьому може виявитись досить складним, але його можна описати двома незв'язаними рівняннями.

Іншим випадком коливань з багатьма ступенями вільності є рух зв'язаної системи, коли існує зв'язок між різними коливальними системами. Зв'язана система – система з багатьма ступенями вільності, між якими існують зв'язки, що забезпечують можливість обміну енергією. Прикладом такої системи є два математичні маятники, з'єднані пружинкою. Система може коливатись в вертикальній площині, в якій в стані рівноваги знаходяться обидва маятники та пружинка, а також у перпендикулярних до цієї площини напрямках, і має загалом чотири степені вільності. Якщо один з маятників відхилити одночасно і в площині маятників і в перпендикулярній площині, то після початку коливань почне розгойдуватись і другий маятник також одночасно в двох напрямках (за своїми ступенями вільності). Такий рух супроводжується передачею енергії від одного маятника до іншого, а амплітуди коливань обох маятників будуть змінюватися в часі. Він завжди може бути поданим як суперпозиція чотирьох гармонічних коливань, частоти яких називають власними (нормальними) частотами коливної системи. Кількість власних (нормальних) частот дорівнює кількості степенів вільності.

Для розгляду основних закономірностей коливання зв'язаних систем розглянемо спрощений випадок – коливання зв'язаних математичних маятників в одній площині, що проходить через точки підвісу та положення рівноваги обох маятників. Тобто, обмежимось розглядом системи з двома ступенями вільності (рис. 14.2). За відсутності зв'язку рівняння руху математичних маятників масою m та довжиною l є такими:

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = m\vec{g} + \vec{T}_1, \qquad (14.1)$$

$$m\ddot{\vec{r}}_2 = m\vec{g} + \vec{T}_2. \qquad (14.2)$$

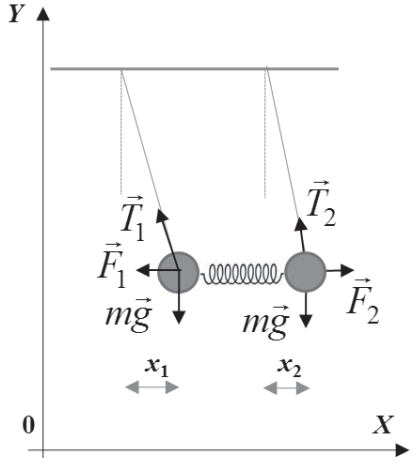


Рис. 14.2. Система зв'язаних маятників.

Після проектування їх на осі OX та OY (рис.14.2) при малих відхиленнях від положення рівноваги ($|x_1|, |x_2| << l$) вони набувають вигляду:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}x_1, \qquad (14.3)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{g}{l}x_2. \qquad (14.4)$$

Більш детально коливання математичного та фізичного маятників описано в лабораторній роботі №2.

При деформації пружини виникає сили пружності $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, які діють на маятники 1 і 2, відповідно:

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_1, \qquad (14.5)$$

$$m\ddot{\vec{r}}_2 = m\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_2. \qquad (14.6)$$

Сили пружності пропорційні її видовженню $x_2 - x_1$ (закон Гука), однакові за модулем та спрямовані в протилежні напрямки:

$$F_{1x} = -F_{2x} = k\left(x_2 - x_1\right), \tag{14.7}$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружини, а F_{1x} і F_{2x} – проекції сил пружності, що діють на маятники 1 і 2 відповідно, на вісь *OX*. В результаті, рівняння руху зв'язаних маятників (14.5) та (14.6) після проектування на вісь *OX* можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{g}{l}x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{14.8}$$

Додамо та віднімемо ці два рівняння:

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\frac{g}{l}(x_1 + x_2), \tag{14.9}$$

$$(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -\frac{g}{l}(x_2 - x_1) - \frac{2k}{m}(x_2 - x_1). \tag{14.10}$$

Розглядаючи суму та різницю координат як дві нові змінні, отримаємо рівняння коливань

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_1^2(x_1 + x_2) = 0, \tag{14.11}$$

$$(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + \omega_2^2(x_2 - x_1) = 0 \tag{14.12}$$

з частотами рівними відповідно

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}. \tag{14.13}$$

Тоді розв'язками рівнянь (14.11) та (14.12) будуть такі функції:

$$x_2 + x_1 = A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \tag{14.14}$$

$$x_2 - x_1 = B_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \tag{14.15}$$

Звідси для відхилень першого та другого маятника шляхом віднімання та додавання лівих та правих частин отримаємо:

$$x_1 = \frac{1}{2}A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{1}{2}B_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \tag{14.16}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}A_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{1}{2}B_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \tag{14.17}$$

Зі співвідношень (14.13) випливає, що в загальному випадку кожен маятник здійснює складне коливання, яке не є гармонічним, оскільки є сумою двох незалежних коливань з частотами ω_1 та ω_2. Проте, спеціальним вибором початкових умов (величин відхилень маятників та їх швидкостей при $t = 0$) можна здійснити збудження коливань лише з однією частотою. Такі коливання, коли обидва маятники зв'язаної системи коливаються з однаковими частотами, називаються нормальними коливаннями системи зв'язаних маятників, а відповідні частоти отримали назву нормальних частот. У нашому випадку кількість нормальних коливань є рівним двом, тобто рівним кількості степенів вільності системи.

Синфазні коливання збуджуються за умови, що в початковий момент часу обидва маятники відхилені від положення рівноваги в один і той самий бік на однакову величину, а початкові швидкості $\dot{x}_1(0)$ та $\dot{x}_2(0)$ рівні:

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0 \text{ та/або } \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0). \tag{14.18}$$

Вплив зв'язку між маятниками на коливання системи в такому випадку відсутній. Синфазні коливання здійснюються з меншою з нормальних частот:

$$\omega_{СФ} \equiv \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{14.19}$$

Зміщення маятників від положення рівноваги при синфазних коливаннях описуються рівняннями (14.15) та (14.16) з B_0 =0.

Протифазні коливання – це коливання маятників, які відбуваються в протифазі з більшою з нормальних частот ω_2:

$$\omega_{ПФ} \equiv \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}. \tag{14.20}$$

Зміщення маятників від положення рівноваги при протифазних коливаннях описуються рівняннями (14.16) та (14.17) з A_0=0.

Такого типу коливання збуджуються за умови, що в початковий момент часу обидва маятники відхилені від положення рівноваги в різні боки на один і той самий кут, і мають протилежно направлені, рівні за модулем швидкості:

$$x_1(0) = -x_2(0) \quad \text{та/або} \quad \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0). \quad (14.21)$$

При довільному виборі початкових умов виникають одразу обидва нормальні коливання, тобто два гармонічних коливання з різними частотами ω_1 та ω_2. Дійсно, довільне коливання можна розглядати як суперпозицію двох коливань з різними початковими відхиленнями – одного, коли маятники відхилені в один бік від положення рівноваги, та другого, коли маятники відхилені в різні боки. Оскільки нормальні коливання мають близькі частоти $\omega_1 - \omega_2 << \omega_1 \approx \omega_2$, то при їх додаванні виникає явище ***биття*** – періодичне збільшення та зменшення амплітуди коливань кожного з маятників (рис. 14.3). Зауважимо, що фази коливань маятників отвідрізняються на $\pi/2$. При найменшій амплітуді одного з маятників амплітуда другого є найбільшою. За відсутності опору середовища загальна енергія системи залишається сталою, і весь час «переходить» від одного маятника до іншого. На рис. 14.3 наведена часова залежність амплітуди коливань маятників з врахуванням опору середовища, внаслідок чого коливання згасають.

Додавання гармонічних коливань. Биття

Під додаванням коливань розуміють знаходження закону результуючих коливань системи у тих випадках, коли ця система одночасно бере участь у кількох коливальних процесах. Розрізняють два граничні випадки – додавання коливань однакового напрямку і додавання взаємно перпендикулярних коливань. У нашій коливальній системі ми маємо справу з першим випадком.

Негармонічні коливання, які виникають внаслідок накладання двох однаково направлених гармонічних коливань з близькими частотами, називаються ***биттями***. Розглянемо додавання двох гармонічних коливань $x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ і $x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ однакових напрямків і різних, але близьких частот ω_1 і ω_2, тобто таких, що $\Omega = |\omega_2 - \omega_1| << \omega_1, \omega_2$. Обмежимось простим випадком однакових амплітуд $A_1 = A_2 = a$. Оскільки частоти коливань різні, то завжди можна так обрати початок відліку часу, щоб початкові фази обох коливань дорівнювали нулю. Тоді сумарне зміщення дорівнюватиме

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t = \\ = 2a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \quad (14.22)$$

Його можна подати у вигляді

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t), \quad (14.23)$$

де $A(t) = 2a\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$, $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Величина $|A(t)|$, що характеризує амплітуду коливань при биттi, змінюється в межах від 0 до $2a$ при $A_1 = A_2$, або, в загальному випадку, від $|A_1 - A_2|$ до $(A_1 + A_2)$ з циклічною частотою $\Omega = |\omega_2 - \omega_1|$, яка називається ***циклічною частотою биття***. Оскільки частота биття набагато менша за частоту коливань ($\Omega << \omega_{1,2}$), змінну величину $|A(t)|$ умовно називають ***амплітудою биття***. Період биття $T_Б$ і частота биттів $\nu_Б$ дорівнюють:

$$T_{Б} = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{T_2} - \frac{2\pi}{T_1}\right|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right|}, \qquad (14.24)$$

$$\nu_{Б} = \frac{1}{T_{Б}} = |\nu_2 - \nu_1|, \qquad (14.25)$$

де T_1, ν_1 і T_2, ν_2 – періоди і частоти коливань, що додаються. Характер залежності x від часу t при битті наведено на рис.14.3 для випадку $A_1 = A_2 = A_0$.

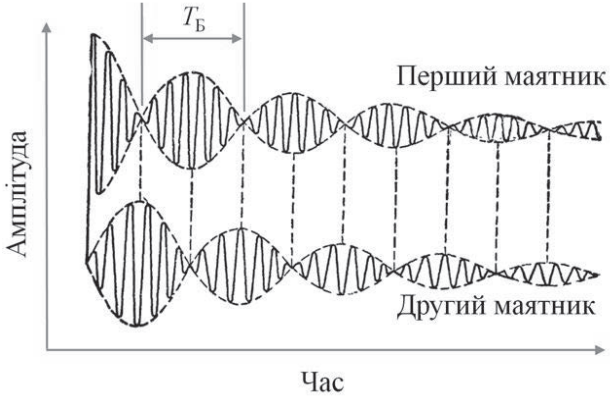


Рис. 14.3. Часова залежність амплітуди коливань маятників.

Вимушені коливання. Резонанс

Розглянемо коливання, які здійснює матеріальна точка, якщо на неї, крім пружної сили і сил опору, діє додаткова зовнішня періодична сила. Такі коливання називаються ***вимушеними***. Прикладом може бути важок, який коливається на пружині і додатково підштовхується через рівні проміжки часу. Змінна зовнішня сила, яка прикладена до системи і зумовлює вимушені механічні коливання, називається ***вимушуючою силою***.

Розглянемо ***вимушені коливання***. Це може бути і математичний маятник, і фізичний маятник, і пружинний маятник – вантаж на пружині, а також система зв'язаних маятників, що використовується в даній роботі. Нехай на маятник крім сили, що повертає його в положення рівноваги (квазіпружна сила), діє зовнішня змінна сила $F(t)$, яка є періодичною функцією часу. Запишемо диференціальне рівняння руху маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t). \qquad (14.26)$$

Другий доданок обумовлений врахуванням сили опору, яка пропорційна швидкості руху маятника.

Відповідно до загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку цього неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння є:

$$x_1(t) = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_\beta t + \varphi), \qquad (14.27)$$

де $a_0 = const$, $\omega_\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Частинний розв'язком є

$$x_2(t) = A\cos(\Omega t + \varphi_0). \qquad (14.28)$$

Іншими словами, маятник бере участь у двох коливаннях:

$$x = x_1(t) + x_2(t). \qquad (14.29)$$

Перший доданок відповідає власним згасаючим коливанням, які завжди збуджуються в системі при дії зовнішньої сили. Ці коливання відбуваються на частоті $\omega_\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Другий доданок відповідає незгасаючим періодичним коливанням маятника з частотою, яка дорівнює частоті вимушуючої сили Ω.

Якщо прикласти до нерухомого маятника зовнішню силу, то спочатку виникає перехідний режим вимушених коливань, коли

маятник поступово розгойдується під дією зовнішньої періодичної сили. З плином часу після вмикання вимушуючої сили перший доданок $x_1(t)$ загасає за експоненціальним законом. Отже, через деякий час доданок $x_1(t)$ практично зникне, і коливання системи будуть визначатись лише другим доданком $x(t) \approx x_2(t)$. Рух коливної системи переходить в режим встановлених гармонічних коливань. Процес встановленням коливань називають перехідним режимом. Його тривалість визначається часом згасання вільних коливань системи τ. ***Характерний час згасання*** або ***релаксації*** (час, за який амплітуда власних коливань зменшиться в *e* разів), як відомо, становить $\tau = 1/\beta$. Цей час якраз і визначає тривалість перехідного режиму встановлення вимушених коливань у системі. Таким чином, чим менше згасання у системі, тим довше вона розгойдується, і навпаки, чим більше у системі опір, тим швидше у ній встановлюються вимушені коливання.

Після закінчення перехідного режиму вимушені коливання встановляться, тобто подальше зростання їх амплітуди припиниться. Кажуть, що при цьому коливальна система перейде в стан ***встановлених вимушених коливань***, які здійснюються з частотою вимушуючої сили. Якщо вимушуюча сила змінюється за гармонічним законом $F(t) = F_0 \cos \Omega t$, то встановлені вимушені коливання є також гармонічними з тією самою частотою:

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi_0). \qquad (14.30)$$

Ця функція є розв'язком диференціального рівняння (14.26) руху маятника (у цьому можна впевнитись підстановкою). Амплітуда встановлених вимушених коливань A та зсув фаз φ_0 між зміщенням x та вимушуючою силою залежать від співвідношення між циклічними частотами вимушених коливань Ω та вільних незгасаючих коливань ω_0 :

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_0(\Omega) = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \qquad (14.31)$$

Звідси видно, що в загальному випадку коливання відбувається не "в фазі" з силою. Тобто, максимального зміщення точка досягає не у той момент, коли сила найбільша. Якщо опір у системі дорівнює нулю ($\beta = 0$), то встановлені вимушені коливання і сила мають однакові фази (щоправда, такі коливання мають нескінченно великий час розгойдування $\tau = 1/\beta$). В усіх інших випадках зсув фаз між ними $\varphi_0 \neq 0$.

Проаналізуємо залежності амплітуди і фази вимушених коливань від циклічної частоти вимушуючої сили. При $\Omega = 0$ отримаємо $\varphi_0(0) = 0$ і $A(0) = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ – ***статичне зміщення*** точки з положення рівноваги під дією сталої сили $F = F_0$. При $\Omega \to \infty$ амплітуда $A(\Omega) \to 0$ і $\operatorname{tg}\varphi_0 \to 0$, а $\varphi_0 \to \pi$. Графіки залежностей $A(\Omega)$ і $\varphi_0(\Omega)$ наведено на рис. 14.4. Амплітуда вимушених коливань має максимум при частоті вимушуючої сили $\Omega_\text{Р}$, яка задовольняє співвідношення:

$$\Omega_\text{Р} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}, \qquad (14.32)$$

де ω – циклічна частота вільних загасаючих коливань точки. Поява такого максимуму свідчить про явище ***резонансу***. Зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні циклічної частоти вимушуючої сили до $\Omega_\text{Р}$ називається явищем ***механічного резонансу***. Відповідно, частота $\Omega_\text{Р}$ називається ***резонансною частотою***, а графіки залежності A від Ω, наведені на рис.14.4 – ***амплітудними резонансними кривими***. Графіки залежності φ_0 від Ω називаються ***фазовими резонансними кривими***.

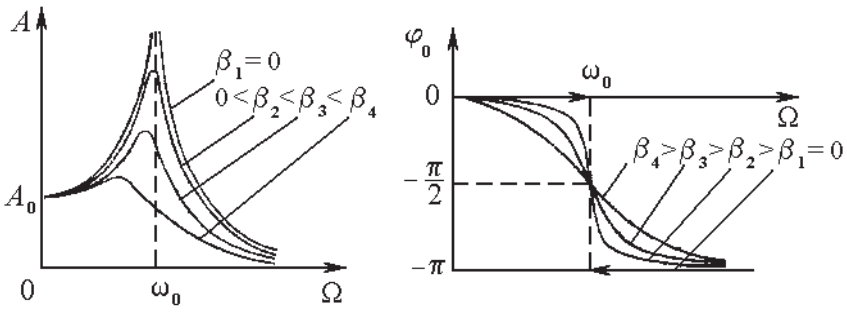


Рис. 14.4. Амплітудні (а) та фазові (б) резонансні криві.

Максимальна амплітуда вимушених коливань спостерігається при резонансі і дорівнює

$$A_{\max} = A(\Omega_{\text{P}}) = \frac{F_0}{2m\beta\omega} = \frac{\pi F_0}{m\lambda\omega^2}, \qquad (14.33)$$

де λ – логарифмічний декремент згасання. $\lambda = \beta T = T/\tau = n^{-1}$, де n – кількість періодів коливань, протягом яких амплітуда вільних коливань зменшується в e разів. Якщо опір середовища дорівнює нулеві, тобто $\beta = 0$, то максимум амплітуди виникає при $\Omega_{\text{P}} = \omega_0$. При цьому, якщо частота вимушуючої сили є рівною частоті ω_0 власних коливань, то амплітуда вимушених коливань є нескінченно великою. При наявності опору середовища ($\beta \neq 0$) амплітуда ніколи не буде нескінченною, і її максимум буде спостерігатись при частотах Ω_{P} вимушуючої сили, менших за ω_0. Чим більша величина β, тим більш широким буде максимум амплітуди і меншою буде резонансна частота.

Швидкість точки при встановлених вимушених гармонічних коливаннях визначатиметься виразом

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -A\Omega\sin(\Omega t + \varphi_0) = A_\upsilon\cos(\Omega t + \alpha). \qquad (14.34)$$

Тут $A_\upsilon = A\Omega$ і $\alpha = \varphi_0 + \pi/2$ – амплітуда швидкості і зсув фаз між швидкістю та вимушуючою силою, причому

$$A_\upsilon = \frac{F_0\Omega}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\dfrac{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2}{\Omega^2} + 4\beta^2}}, \qquad (14.35)$$

$$\text{tg}\alpha = -\text{ctg}\varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega}. \qquad (14.36)$$

Амплітуда швидкості максимальна при $\Omega = \omega_0$ і дорівнює

$$A_{\upsilon,\max} = A_{\text{v}}(\omega_0) = F_0/2m\beta. \qquad (14.37)$$

У такому випадку $\alpha = 0$, тобто швидкість змінюється синфазно з вимушуючою силою. При $\Omega \to \infty$ амплітуда $A_\upsilon \to 0$ і $\alpha \to -\pi/2$, а при $\Omega \to 0$ амплітуда $A_\upsilon \to 0$ і $\alpha \to \pi/2$.

Прискорення точки при встановлених вимушених гармонічних коливаннях

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi_0) = A_a\cos(\Omega t + \gamma). \qquad (14.38)$$

Тут $A_a = A\Omega^2$ і $\gamma = \varphi_0 + \pi$ – амплітуда прискорення і зсув фаз між прискоренням та вимушуючою силою, причому

$$A_a = \frac{F_0\Omega^2}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\Omega^2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{2\beta}{\Omega}\right)^2}}. \qquad (14.39)$$

Амплітуда прискорення максимальна при

$$\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} \approx \omega_0\left(1 + \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right). \qquad (14.40)$$

При $\Omega = 0$ амплітуда $A_a = 0$, а при $\Omega \to \infty$ амплітуда прискорення наближається до величини $A_a(\infty) = F_0/m$.

При встановлених вимушених коливаннях втрати енергії коливальною системою, які зумовлені опором, повністю компенсуються за рахунок роботи, що виконується вимушуючою силою. Наприклад, робота, що виконується за одне коливання силою опору, яка діє на маятник, дорівнює

$$A_1 = -b\int_0^T \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = -2m\beta A^2\Omega^2 \int_0^T \sin^2(\Omega t + \varphi_0)\,\mathrm{d}t = -m\beta A^2\Omega^2, \quad (14.41)$$

де $b = 2m\beta$ – коефіцієнт опору. Робота, що виконується за такий самий проміжок часу вимушуючою силою $F_x = F_0\cos\Omega t$, дорівнює

$$A_2 = F_0\int_0^T \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cos\Omega t \;\; \sin(\Omega t + \varphi_0)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}A\Omega F_0\sin\varphi_0 = -A_1, \quad (14.42)$$

оскільки $\sin\varphi_0 = -2m\beta A\Omega/F_0$. Робота зовнішньої сили максимальна при зсуві фаз $\varphi_0 = -\pi/2$, тобто при частоті, близькій до резонансної. При інших зсувах фаз сила частково діє прискорювально, а частково протидіє руху. При $\varphi_0 = 0$ або $\varphi_0 = -\pi$ сила протягом половини періоду прискорює рух, а протягом іншої половини періоду вона протидіє руху, тобто в середньому її робота дорівнює нулю. Звідси випливає, що поза областю резонансу вимушуюча сила виконує лише незначну роботу, а при резонансі ця робота зростає. Такий ефект максимально помітний при гострому резонансі, коли $\beta \to 0$.

Вимірювання

1. Знайти нормальні частоти коливань зв'язаної системи маятників $\omega_{C\Phi}$ та $\omega_{П\Phi}$.

1.1. Встановити тягарці маятників на однаковій відстані від точки закріплення.

1.2. Збудити синфазні коливання, для чого відхилити маятники в один бік на кут 5–7° та надати їм однакові за модулем та напрямком швидкості.

1.3. Знайти час $t_{C\Phi}$ для n = 10 коливань. Після висвічування цифри «9» на індикаторному полі періодів коливань натиснути клавішу «стоп». Згодом, у момент припинення вимірів буде зареєстровано число коливань n = 10, а на іншому індикаторному полі буде зафіксована тривалість цих коливань. Повторити виміри періоду коливань щонайменше 5 разів.

1.4. Розрахувати період синфазних коливань $T_{C\Phi} = t_{C\Phi}/n$, знайти середнє значення $\langle T_{C\Phi}\rangle$ та оцінити похибку $\Delta T_{C\Phi}$.

1.5. Знайти циклічну частоту синфазних коливань за формулою $\omega_{C\Phi} = 2\pi/T_{C\Phi}$. Визначити її середню величину $\langle\omega_{C\Phi}\rangle$ та оцінити похибку $\Delta\omega_{C\Phi}$. Результати занести в табл.14.1.

Табл. 14.1

Номер виміру	$T_{C\Phi}$, с	$\langle T_{C\Phi}\rangle$, с	$\omega_{C\Phi}$, рад/с	$\langle\omega_{C\Phi}\rangle$, рад/с
1				
2				
3				
4				
5				

1.6. Аналогічно пп. 1.1–1.5 провести вимірювання періоду та розрахунок частоти протифазних коливань. Особливість їх збудження полягає в тому, що початкові відхилення маятників мають бути здійснені в протилежні напрямки на кут 5–7°. Результати занести в табл.14.2.

Табл. 14.2

Номер виміру	$T_{ПФ}$,с	$\langle T_{ПФ} \rangle$,с	$\omega_{ПФ}$, рад/с	$\langle \omega_{ПФ} \rangle$, рад/с
1				
2				
3				
4				
5				

2.7 Двічі змінити відстань від тягарців маятників до точки закріплення і повторити дії пп. 1.1–1.6.

2. Спостереження явища биття.

2.1 Відхилити один маятник від положення рівноваги і відпустити.
2.2 Зафіксувати проміжок часу t_0 від початку руху до зупинки цього маятника.
2.3 Знайти період биття $T_Б$ (див.рис.14.3).
2.4 Знайти циклічну частоту биття $\Omega = 2\pi / T_Б$.
2.5 Повторити вимірювання циклічної частоти биття ще двічі.
2.6 Знайти середнє значення $\langle \Omega \rangle$ та оцінити похибку вимірювання частоти биття $\Delta\Omega$.
2.7 Двічі змінити відстань від тягарців маятників до точки закріплення і повторити дії пп. 2.1–2.6.

3. Спостереження явища резонансу.

3.1 Закріпити тягарці маятників так, щоб частоти нормальних коливань відрізнялись найменше (порівняти результати, отримані в п. 1.9 для частот синфазних та протифазних коливань для різних відстаней від тягарців маятників до точки закріплення).
3.2 З'єднати стержень із системою маятників.

3.3 Плавно змінювати частоту коливань стержня, що задається на панелі приладу.
3.4 Знайти частоту, при якій у системі зв'язаних маятників чітко виникають синфазні коливання. Записати їх амплітуду, виміряти період і визначити частоту.
3.5 Знайти частоту, при якій в системі зв'язаних маятників чітко виникають протифазні коливання. Записати їх амплітуду, виміряти період і визначити частоту.
3.6 Ще двічі змінити відстань від тягарців маятників до точки закріплення і повторити дії пп. 3.2–3.5.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Визначити коефіцієнт жорсткості пружини k за формулою

$$k = \left(\omega_{ПФ}^2 - \omega_{СФ}^2\right)\frac{m}{2}, \qquad (14.43)$$

де $\omega_{СФ}$ та $\omega_{ПФ}$ – виміряні значення частот синфазних та протифазних коливань, m – маса тягарця. Також обчислити похибку вимірювання коефіцієнта Δk .

2. Розрахувати частоту биття за формулою

$$\Omega = \omega_{ПФ} - \omega_{СФ} \qquad (14.44)$$

і порівняти це значення з експериментальним значенням, отриманим при виконанні п. 2.4 розділу «Вимірювання», проаналізувавши причини відхилення цих значень.

3. Порівняти експериментально виміряні частоти синфазного і протифазного коливань при різних відстанях від тягарців маятників до точки закріплення з відповідними експериментальними частотами вільних синфазних і протифазних коливань, обчисливши абсолютне та відносне відхилення відповідних значень. За наявності відхилень пояснити їх.

Теоретичні завдання

1. Дати визначення коливного процесу (коливання). Пояснити, що таке гармонічні коливання. Пояснити, за якої умови коливання будуть гармонічними.
2. Записати рівняння гармонічних коливань (рівняння гармонічного осцилятора) та його розв'язок. Пояснити, що таке амплітуда, частота, період та фаза коливань.
3. Пояснити, що таке нормальні коливання системи зв'язаних маятників. Типи нормальних коливань для системи двох математичних маятників, з'єднаних пружиною.
4. Пояснити, що таке синфазні коливання. Як їх збудити? Вивести вираз для частоти синфазних коливань.
5. Пояснити, що таке протифазні коливання. Як їх збудити? Вивести вираз для частоти протифазних коливань.
6. Пояснити яким чином зміняться частоти синфазних та протифазних коливань: а) при збільшенні відстані від точки підвісу до пружини, що з'єднує маятники; б) при збільшенні маси тягарців, закріплених на маятниках?
7. Пояснити, що собою являє явище биття. Отримати вираз для частоти биття.
8. Схематично побудувати і прокоментувати графік залежностей зміщень маятників з положення рівноваги за наявності биття. Яким чином вплине тертя на рух маятників?
9. Пояснити яким чином зміниться частота биття: а) при збільшенні відстані від точки підвісу до пружини, що з'єднує маятники; б) при зміні маси тягарців, закріплених на маятниках?
10. Дати визначення вимушених коливань. Написати рівняння руху маятника, що здійснює вимушені коливання під дією зовнішньої гармонічної сили.
11. Проаналізувати залежність амплітуди вимушених коливань маятника від частоти зовнішньої гармонічної сили. Яке явище називають резонансом? Яким чином змінюється резонансна частота при зростанні тертя в системі?

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронна версія // Київ, 2013.
2. И. Е. Иродов, «Основные законы механики» // Москва, Высшая школа, 1985
   або И. Е. Иродов, «Механика. Основные законы» // Москва–Санкт-Петербург, Физматлит, 2001.
3. С. Г. Каленков, Г. И. Соломахо, «Практикум по физике. Механика» // Москва, 1990.
4. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Механика» // Москва, Наука, 1979 – 1993.
5. А. Н. Матвеев, «Механика и теория относительности» // Москва, Высшая школа, 1986.
6. Иродов Е. И. Волновые процессы. Основные законы: учеб. пособие для вузов / Е. И. Иродов. – М., 2002.
7. Горелик Г. С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику / Г. С. Горелик. – М., 2007.
8. Карлов Н. В. Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. – М., 2001, 2003.
9. Рабинович М. И. Основы теории колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М., 1987.
10. В.А.Алешкевич. Колебания и волны. Лекции / В.А.Алешкевич, Л.Г.Деденко, В.А.Караваев. – М., 2001.

РОБОТА №15

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗВУКУ І МОДУЛЯ ЮНГА У ТВЕРДИХ ТІЛАХ

Мета роботи

1. Дослідити умови виникнення власних коливань в стержнях зі слабо поглинаючих звук матеріалів.
2. Визначити швидкість звуку і модуль Юнга шляхом вимірювання резонансних частот поздовжніх звукових коливань у стержнях.

Опис експериментальної установки

Установка (рис. 15.1) складається з генератора сигналів 1, приладу для закріплення стержнів 2 з двома електромагнітами 3 для збудження і приймання поздовжніх коливань та осцилографа 4, який використовується для візуалізації акустичних коливань стержня. Досліджуваний стержень закріплюється затискачем точно посередині так, щоб його правий і лівий кінці були розташовані проти полюсів електромагнітів. Збуджувач і приймач необхідно розташувати досить близько від кінців стержня. Досягають цього за допомогою мікрогвинтів, жорстко зв'язаних з електромагнітами.

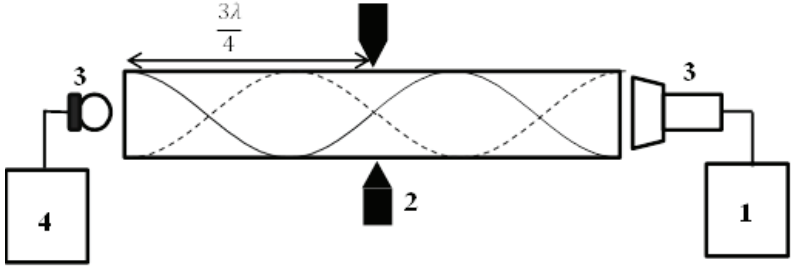


Рис. 15.1 Схема експериментальної установки

Змінна напруга від генератора Г3-34 підводиться до котушки електромагніта збудження. У результаті на правий кінець стержня діє періодична сила певної частоти, і в феромагнітному стержні виникають поздовжні хвилі. Якщо стержень зроблено із немагнітного матеріалу, для збудження коливань до його кінців приклеюють тонкі залізні пластинки. Лівий електромагніт-приймач є перетворювачем акустичних коливань стержнів в електричні. Його котушка приєднується до входу осцилографа.

Теоретичні відомості

Пружні хвилі в твердих тілах. Поздовжні хвилі в тонкому стержні

У тонкому стержні можливим є поширення поздовжніх та поперечних пружних хвиль. ***Хвилею*** називається процес поширення коливань частинок пружного середовища у просторі**.** Якщо частинки середовища коливаються у напрямку розповсюдження хвилі, то такі коливання називають ***поздовжніми хвилями***, якщо перпендикулярно – ***поперечними***. ***Поздовжні хвилі пов'язані з об'ємною деформацією*** пружного середовища і тому можуть поширюватися у будь-якому середовищі – в твердому тілі, рідині, газі. ***Механічні поперечні хвилі пов'язані з деформацією зсуву*** пружного середовища і тому можуть виникати і поширюватися лише в середовищах, які мають пружність форми, тобто у твердих тілах. Зауважимо, що сказане вище стосується хвиль, що поширюються в об'ємі середовища. На границях розділу будь-яких середовищ, зокрема рідин і газів, можливе утворення ***поверхневих хвиль***, у процесі поширення яких беруть участь лише приповерхневі частинки середовищ, що межують. ***Такі хвилі є поздовжньо-поперечними***, оскільки частинки середовища при їх коливаннях мають складову швидкості як паралельну, так і перпендикулярну до напрямку поширення хвилі. Прикладом поверхневих хвиль є хвилі на поверхні води.

Пружну хвилю в стержні можна збудити, прикладаючи періодичну силу до торця стержня або вдаривши по ньому в поздовжньому напрямі. При цьому в стержні будуть

розповсюджуватись ділянки деформації розтягу та стиску. Деформацію розтягу стержня з початковою довжиною l_0 характеризують відносним видовженням $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$. При малих деформаціях ($|\varepsilon| \ll 1$), які є пружними, відносне видовження ε пропорційне механічному напруженню σ, яке визначається, як величина модуля сили пружності F, що припадає на одиницю площі S поперечного перерізу стержня, $\sigma = \dfrac{F}{S}$, і може бути подане як $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$, де ***E– модуль Юнга***. Співвідношення $\sigma = E\varepsilon$ являє собою так ***звану диференціальну форму запису закону Гука*** для пружних деформацій. Оскільки відносне видовження є безрозмірною величиною, то модуль Юнга має таку саму розмірність, як і механічне напруження σ, тобто розмірність тиску, і в системі СІ вимірюється у паскалях.

Загалом при поширенні пружної хвилі в стержні додатково до деформації розтягу-стиску буде виникати деформація зсуву і, відповідно, тангенціальна (дотична) до поперечного перерізу стержня складова механічного напруження, що суттєво ускладнює наш розгляд. Якщо поперечний розмір стержня є набагато меншим за довжину повздовжньої пружної хвилі, то зміщення периферійних ділянок стержня в радіальному напрямку відбувається за час набагато менший за період хвилі і не впливає на величину відносного видовження ε. Тому надалі ми розглядатимемо тільки деформації розтягу-стиску.

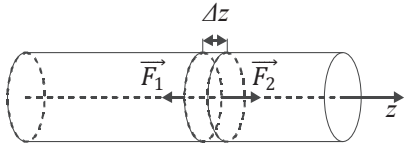


Рис. 15.2 Сили, що діють на елемент стержня

Розглянемо рух малого порівняно з довжиною хвилі елементу стержня з масою *dm*, обмеженого перерізами з координатами z та $z+dz$, де $\Delta z << \lambda$, у той момент, коли при проходженні повздовжньої хвилі він є

розтягнутим. У пружній хвилі деформація розтягу неоднорідна (різні значення $\varepsilon > 0$ при різних z). Внаслідок цього, напруження σ в перерізах при z та $z+dz$, які обмежують обраний елемент, хоча і є додатними (знак σ зажди співпадає зі знаком ε, $\sigma = \varepsilon E$), але мають різну абсолютну величину[1]. Відповідно сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, що прикладені до перерізів з координатами z та $z + dz$, мають взаємно протилежні напрямки (Рис. 15.2).

Запишемо рівняння руху цього елемента

$$m\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \ , \qquad (15.1)$$

де m – маса елемента, $\vec{\xi}$ – його зміщення з положення рівноваги, і спроектуємо його на вісь z:

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_{1z} + F_{2z} \, . \qquad (15.2)$$

Проекції сил у правій частині рівняння (15.2) можна переписати через механічні напруження

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S\sigma(z + \Delta z) - S\sigma(z) \, . \qquad (15.3)$$

Розкладемо функцію $\sigma(z + \Delta z)$ в ряд в околі точки z: $\sigma(z + \Delta z) = \sigma(z) + \left.\dfrac{d\sigma}{dz}\right|_z \Delta z + \dfrac{1}{2}\left.\dfrac{d^2\sigma}{dz^2}\right|_z \Delta z^2 + \ldots$ і, нехтуючи членами розкладу старшими ніж лінійний, отримаємо зі співвідношення (15.3):

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S\frac{d\sigma}{dz}\Delta z \, . \qquad (15.4)$$

[1] Усі ці міркування застосовні і до стиснутого елемента стержня з тією різницею, що при стиску $\varepsilon < 0, \sigma < 0$.

Після підстановки $\sigma = \varepsilon E$ і $m = \rho S \Delta z$ та скорочення на об'єм елемента $S\Delta z$ рівняння (15.4) набирає вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{d\varepsilon}{dz} \ , \qquad (15.5)$$

звідки видно, що результуюча сила, прикладена до елемента Δz, зумовлена неоднорідністю відносного видовження ε на довжині цього елемента. Покажемо, що відносне видовження ε елемента Δz може бути подане як $\varepsilon = d\xi / dz$.

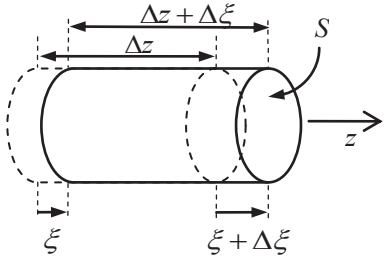


Рис. 15.3 Зміщення основ циліндра при проходженні поздовжньої хвилі

Для цього розглянемо більш детально розтяг елемента стержня, який до початку деформації мав форму циліндра з площею основи S і висотою Δz (Рис.15.3). При проходженні поздовжньої хвилі в додатному напрямку осі Oz зміщення лівої і правої основ цього циліндра будуть різними. Нехай у деякий момент часу зміщення лівої основи від її рівноважного положення становить ξ, а правої $\xi + \Delta\xi$, причому $\xi, \Delta\xi > 0$. Це означає, що даний циліндричний елемент зазнав зміщення на величину $\xi + \Delta\xi / 2 \approx \xi$ у додатному напрямку осі Oz і розтягу (видовження) на величину $\xi + \Delta\xi - \xi = \Delta\xi$ в тому ж напрямку. Отже, відносне видовження цього циліндра становить величину $\varepsilon = \Delta\xi / \Delta z$. Перехід до границі при $\Delta z \to 0$ дає шукане значення $\varepsilon = d\xi / dz$, використовуючи яке, рівняння руху (15.5) можна переписати у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{d^2 \xi}{dz^2} \ . \qquad (15.6)$$

Оскільки зміщення ξ залежить не лише від координати z але й від часу t, використаємо в правій частині цього рівняння позначення частинної похідної за координатою z, а також поділимо його ліву і праву частину на ρ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \ . \qquad (15.7)$$

Порівнюючи рівняння (15.7) з загальним виглядом хвильового рівняння $\Delta\xi - \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$, отримаємо вираз для швидкості поширення повздовжньої пружної хвилі у тонкому стержні

$$\upsilon_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \ , \qquad (15.8)$$

яка залежить лише від модуля Юнга E і об'ємної густини середовища (матеріалу стержня) ρ .

Зауважимо, що рівняння (15.8) отримане у припущенні, що стержень тонкий, у зв'язку з чим ми нехтували деформаціями зсуву. Вираз для швидкості поздовжніх пружних хвиль, які можуть розповсюджуватись вздовж товстого стержня, а також у необмеженому ізотропному твердому тілі, буде рівною

$$\upsilon_L = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}} \ , \qquad (15.9)$$

де μ – так званий коефіцієнт Пуассона, що враховує зв'язок поперечної та поздовжньої деформацій, $\mu = E/(2G-1)$, де G – модуль зсуву.

Стоячі хвилі в стержні

Як було зауважено вище, біжуча хвиля виникає в стержні під дією електромагніта – збуджувача, розташованого біля правого кінця стержня. Ця хвиля, досягаючи лівого кінця стержня, відбивається і поширюється в протилежному напрямку. Внаслідок накладання прямої і відбитої хвиль у стержні можуть утворюватися ***стоячі хвилі***. Детальніше прочитати про основні властивості

стоячих хвиль можна в описі до роботи № 13. Центр стержня закріплений, тому стоячі хвилі виникатимуть лише за умови, що в місці закріплення існуватиме вузол зміщення стоячої хвилі, а пучності зміщення знаходитимуться на вільних кінцях стержня (див. рис.15.1). Оскільки відстань між сусідніми вузлом і пучністю дорівнює $\lambda/4$, то на половині довжини стержня має вкладатися непарна кількість чвертей хвиль:

$$\frac{l}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{4},\ \text{де}\ n = 0,1,3,\ldots, \qquad (15.10а)$$

або

$$2l = (2n+1)\lambda,\ \textit{де}\ n = 0,1,3,\ldots, \qquad (15.10б)$$

З умови (15.10б) випливає, що найбільша можлива довжина біжучих хвиль, які, поширюючись у протилежних напрямках, здатні в результаті додавання амплітуд створити стоячу хвилю, відповідає значенню $n = 0$ і становить $\lambda_{\text{макс}} = 2l$. З іншого боку, з умови (15.10а) випливає, що за заданої величини λ, довжина l не може бути меншою ніж $l_{\text{мін}} = \lambda/2$. Вираз (15.10б) відбиває фізичну суть умови утворення стоячих хвиль в середовищі заданої довжини, оскільки визначає мінімальний шлях, який потрібен, щоб між біжучими хвилями, що поширюються у протилежних напрямках, виникла різниця фаз, яка дорівнює 2π, і тим самим забезпечує повну відтворюваність просторового розподілу амплітуди коливань.

Швидкість звуку пов'язана з довжиною хвилі та частотою співвідношенням

$$\upsilon_L = \lambda\nu\,. \qquad (15.11)$$

Тоді для частоти *n*-го тону, враховуючи (15.10) і (15.11), отримаємо:

$$\nu_n = \frac{(2n+1)\upsilon_L}{2l}\,, \qquad (15.12)$$

де $n = 0$ для основного тону, $n = 1,2,3...$ для обертонів. Тоді, з рівняння (15.12) отримаємо формулу для визначення швидкості поздовжніх звукових хвиль в стержні довжиною *l*:

$$\upsilon_L = \frac{2l}{2n+1}\nu_n\,. \qquad (15.13)$$

Вимірювання

1. Збирають установку за схемою, що показана на рис. 15.1. Стержень закріплюють у тримачі точно посередині.
2. Користуючись мікрогвинтами і спеціальним щупом, наближають електромагніти до кінців стержня так, щоб повітряний зазор між ними був не більше 0,1 – 0,2 мм.
3. Кнопкою «Сеть» вмикають генератор частот. Вмикають осцилограф (кнопку «Питание» потягнути на себе). Почекати 2 хвилини для встановлення стабільної роботи осцилографа. Ручкою «Частота грубо» на генераторі частот повільно змінюють частоту, що подається на електромагніт і спостерігають за синусоїдами на екрані осцилографа. Одна із синусоїд – вхідний сигнал, інша – вихідний. При збігу частоти збуджуючої сили (частоти, що задається генератором звуку) з власною частотою коливань стержня ν_n виникає резонанс, внаслідок чого амплітуда одної із синусоїд на екрані осцилографа різко зростає. ***Резонанс*** – значне зростання амплітуди коливань при співпадінні частоти зовнішньої сили і частоти власних коливань системи ν_n. Для точного визначення частоти резонансу користуватись ручкою «Частота точно». Резонанс можна спостерігати на основній частоті ν_0 і кількох обертонах ν_n, де *n*=1,2,… Оскільки, довжина стержня є близько метра, а швидкість поздовжніх хвиль у металах становить кілька тисяч метрів за секунду, то основна частота лежить у діапазоні кількох кілогерц. Тому починати пошуки резонансу треба з 1 кГц, поступово підвищуючи частоту генератора. Записати всі частоти $\nu_n^{\text{експ}}$, для яких спостерігається резонанс до таблиці 15.1.

Для кожної знайденої частоти $\nu_n^{\text{експ}}$ виміри виконати не менше 5 разів.

4. Поряд з власними коливаннями стержня можуть збуджуватись власні коливання окремих частин і всієї установки в цілому (паразитні резонанси). Ці частоти лежать у діапазоні до кількох кГц. Для ***власних коливань стержня*** є характерними такі закономірності, які дозволяють відрізнити їх від паразитних резонансів.
   - Якщо торкатись рукою стержня в пучності коливань (поблизу кінців стержня), то амплітуда коливань різко зменшується; дотик у вузлі (у центрі стержня) на величину сигналу практично не впливає.
   - Поряд з раніше згаданими джерелами паразитних резонансів, може виникнути резонанс на поперечних коливаннях стержня. Щоб уникнути цього, необхідно встановлювати магніти точно на осі стержня, усуваючи таким чином поперечну складову збуджуючої сили.
5. Обчислити середні значення знайдених власних частот $< \nu_n^{\text{експ}} >$ коливань стержня. Записати ці значення до таблиці 15.1.
6. Повторити вказані виміри для інших двох стержнів.

Табл. 15.1

Номер резонансу	$\nu_n^{\text{експ}}$, Гц					$< \nu_n^{\text{експ}} >$, Гц	$\nu_n^{\text{теор}}$, Гц	ε %	υ_L, м/с	E Н/м^2
	1	2	3	4	5					
1										
2										
…										
N										

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Виміряти довжину стержня *l*. Використовуючи дані таблиці 15.2 за формулою (15.12) розрахувати значення власних частот коливань $\nu_n^{\text{теор}}$ для *n*=0,1,2… Записати до таблиці 15.1 лише ті частоти, які попадають в досліджуваний діапазон 500-1200 Гц. Розрахунки зробити для трьох стержнів.
2. Провівши досліди з кількома стержнями, визначити частоти $< \nu_n^{\text{експ}} >$, які не залежать від матеріалу стержня і виключити їх.
3. За формулою $\varepsilon = \frac{|<\nu_n^{\text{експ}}> - \nu_n^{\text{теор}}|}{\nu_n^{\text{теор}}} \cdot 100\%$ визначити відносне відхилення експериментальних частот від розрахованих.
4. Використовуючи виміряні значення частот, за формулою (15.13) знайти швидкість поздовжніх звукових хвиль у стержнях, виготовлених з різних матеріалів.
5. Використовуючи визначене в п.4 значення швидкості звуку, а також табличні значення об'ємних густин сталі, алюмінію та латуні визначити модуль Юнга для досліджених стержнів за формулою (15.8).
6. Розрахувати абсолютні та відносні похибки визначення швидкості звуку в різних стержнях.
7. Порівняти отримані значення швидкості звуку з табличними значеннями (див. Табл.15.2) для досліджених матеріалів. Розрахувати відносні відхилення від табличних значень. Пояснити можливі причини виникнення похибок.
8. Використовуючи табличні значення модуля Юнга та модуля зсуву для досліджуваних в роботі стержнів, оцінити за формулою (15.9) швидкість поширення звуку в товстому стержні. Порівняти ці значення з визначеними в роботі значеннями υ_L.

Табл.15.2 Швидкість звуку в твердих тілах

Речовина	В тонкому стержні, υ_L, м/с	В об'ємному середовищі	
		Поздовжня υ_L, м/с	Поперечна, υ_T, м/с
сталь	5160	6000	3200
алюміній	5100	6300	3100
латунь	3500	4400	2100

Теоретичні завдання

1. Хвильове рівняння та його розв'язок. Основні характеристики звукової хвилі (частота, довжина, швидкість поширення). Записати співвідношення, що зв'язують ці величини.
2. Дати означення поздовжніх та поперечних хвиль у пружному середовищі. З якими видами деформацій вони пов'язані. Яку хвилю досліджують в цій роботі – поздовжню чи поперечну?
3. Що таке стоячі хвилі? Як вони утворюються в цьому досліді?
4. Дати означення вузлів та пучностей стоячої хвилі. Чому дорівнюють відстані між сусідніми (а) вузлами, (б) пучностями, (в) вузлом і пучністю?
5. Пояснити, чи буде в умовах даного досліду відбуватись перенесення енергії пружної деформації вздовж стержня. Відповідь обгрунтувати.
6. Що таке власні коливання стержня? Як відрізнити власні коливання від інших коливань, можливих при виконанні цієї роботи?
7. Вивести формулу (15.13) для визначення швидкості звуку в стержні. Що таке основний тон, обертони? Намалювати профілі стоячих хвиль у стержні для даних умов закріплення. Як зміниться формула (15.13) за умови закріплення стержня на одному з його кінців?

8. Що таке резонанс? Умова виникнення резонансу.
9. Чому швидкості звуку в трьох досліджених стержнях відрізняються?

Рекомендована література

1. «Общий физический практикум. Механика», под редакцией А. Н. Матвеева, Д. Ф. Киселева // Москва, МГУ, 1991.
2. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
3. С. П. Стрелков, «Общий курс физики. Механика» // Москва, Наука, 1975.
4. И. В. Савельев, «Курс общей физики, том 1. Механика. Колебания и волны. Молекулярная физика» // Москва, Наука, 1970.
5. «Физический практикум», под редакцией В. И. Ивероновой // Москва, Наука 1967.
6. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Т. 1. Механика» // Москва, Наука, 1989.

РОБОТА №16

ВИВЧЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

Мета роботи

1. Дослідити власні коливання струни.
2. Отримати залежність частот власних коливань струни від сили її натягу.

Опис експериментальної установки

Схема, за якою зібрана установка, наведена на рис. 16.1. Принцип дії приладу ґрунтується на виникненні сил, що діють на струну (провідник з постійним струмом) у змінному магнітному полі. Струна натягнута між полюсами електромагнітів, які генерують змінне магнітне поле. Один кінець струни жорстко закріплюється, а інший (другий) прикріплений до пружини. Другий кінець пружини механічно зв'язаний з гвинтовим механізмом, який забезпечує зміну сили натягу струни. Сила натягу струни (в ньютонах) вимірюється за допомогою вказівника, що переміщується по шкалі при зміні натягу. Внаслідок взаємодії постійного струму, що тече по струні, зі змінним магнітним полем електромагніту, відбуваються коливання струни у вертикальній площині. При переміщенні електромагніту вздовж струни можна знайти таку точку, де струна буде збуджуватися найбільш ефективно. У цій точці утворюватиметься пучність стоячої хвилі.

На передній панелі вимірювального блоку є такі регулюючі ручки:

- Ручки «ЧАСТОТА ГРУБО» та «ЧАСТОТА ТОЧНО» – для встановлення частоти генератора.
- Ручка «УРОВЕНЬ» – для встановлення необхідної амплітуди вихідної напруги генератора, що визначає амплітуде коливань струни.

На рис. 16.1 цифрами позначено такі елементи установки:

1. Рідкокристалічний дисплей.
2. Направляючий ролик.

3. Ручка «ЧАСТОТА ГРУБО».
4. Скоба з постійними магнітами.
5. Ручка «ЧАСТОТА ТОЧНО».
6. Ручка «УРОВЕНЬ».

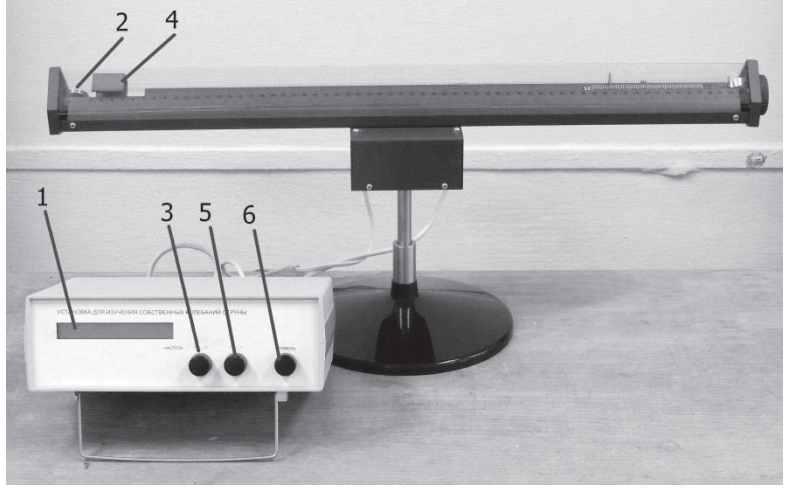


Рис.16.1. Прилад для вивчення власних коливань струни ФПВ-03.

Теоретичні відомості

Пружні хвилі. Хвильове рівняння та рівняння хвилі

У струні, що знаходиться під натягом, можливе збудження ***поперечних коливань***, коли зміщення точок струни перпендикулярні до напрямку розповсюдження збурення. Процес поширення збурення зі скінченною швидкістю носить назву хвилі, у даному випадку – ***поперечної*** хвилі. Рівняння будь-якої хвилі є розв'язком диференціального рівняння, яке ще називають ***хвильовим рівнянням***:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0 \text{ або } \Delta\xi-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0\,, \qquad (16.1)$$

де ξ – величина зміщення частинки (елемента) струни з положення рівноваги. Один з частинних розв'язків хвильового рівняння (***рівняння хвилі***) описує плоску гармонічну хвилю:

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0). \qquad (16.2)$$

Рівняння (16.2) показує розподіл зміщення частинки з положення рівноваги в залежності від часу t та координати $\vec{r}$ у напрямі розповсюдження хвилі; ξ_0 – амплітуда коливань, φ_0 – початкова фаза. У формулі (16.2) $\vec{k}$ – хвильовий вектор, що визначає напрям поширення плоскої хвилі, а його модуль $k = 2\pi/\lambda$; $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – циклічна частота, ν – лінійна частота, а T – період коливань. Довжина хвилі λ – це відстань між двома точками хвилі, що різниця фаз коливань між якими дорівнює 2π. При цьому:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}, \qquad (16.3)$$

де υ – швидкість поширення хвилі. Швидкість поширення поперечної хвилі υ зв'язана з пружними властивостями середовища співвідношенням:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad (16.4)$$

де G – модуль зсуву, ρ – густина речовини.

Власні коливання струни. Стоячі хвилі в струні

Як відомо, хвилям властиве ***явище інтерференції*** – стійке за часом взаємне підсилення хвиль в одних точках простору і послаблення в інших, залежно від співвідношення між фазами цих хвиль. Явище інтерференції відбувається при просторовому накладанні двох або більшої кількості хвиль. Окремим випадком інтерференції є ***стоячі хвилі***. Нехай у деякій точці маємо дві плоскі гармонічні хвилі, що біжать вздовж осі z – пряму та відбиту від границі даного середовища. Тоді сумарне зміщення

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \cos(\omega t - kx) + \xi_0 \cos(\omega t + kx) = \\ = 2\xi_0 \cos kx \cos \omega t = A(x)\cos \omega t, \qquad (16.5)$$

де

$$A(x) = 2\xi_0 \cos kx. \qquad (16.6)$$

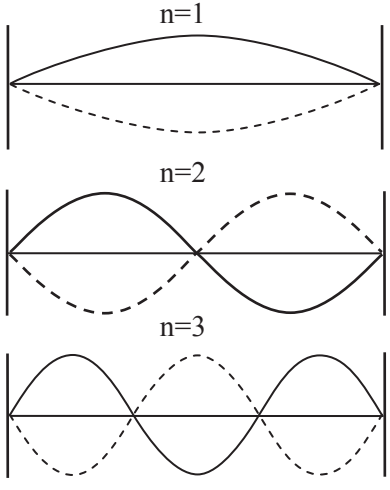


Рис. 16.2. Профіль стоячої хвилі для різних значень *n*.

На відміну від хвилі, що біжить, (див. співвідношення (16.2)), стояча хвиля має амплітуду $A(x)$ таку, що залежить від координати x. Точки, де амплітуда максимальна і дорівнює $A(x)=2\xi_0$, називаються ***пучностями стоячої хвилі***. Точки, де амплітуда коливань мінімальна (дорівнює нулю), називаються ***вузлами стоячої хвилі***. Детальніше прочитати про основні властивості стоячих хвиль можна в описі до роботи № 13.

У струні довжиною l, що жорстко закріплена на своїх кінцях, стоячі хвилі утворюватимуться лише за умови існування на цих кінцях вузлів зміщення. Оскільки відстань між сусідніми вузлами дорівнює половині довжини хвилі, то зрозуміло, що умовою виникнення стоячих хвиль у струні буде вкладання на довжині струни цілої кількості $\lambda/2$ (див. рис. 16.2):

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \text{ де } n = 1,2,3,... \qquad (16.7а)$$

або

$$2l = n\lambda, \text{ де } n = 1,2,3,... \quad . \qquad (16.7б)$$

З умови (16.7б) випливає, що найбільша можлива довжина біжучих хвиль, які, поширюючись у протилежних напрямках, здатні в результаті додавання амплітуд створити стоячу хвилю, відповідає значенню $n = 1$ і становить $\lambda_{\text{макс}} = 2l$. З іншого боку, з умови (16.7а) випливає, що за заданої величини λ, довжина l не може бути меншою за $l_{\text{мін}} = \lambda/2$. Вираз (16.7б) відбиває фізичну суть умови утворення стоячих хвиль в обмеженому середовищі заданої довжини, оскільки визначає мінімальний шлях, який потрібен, щоб між біжучими хвилями, що поширюються у протилежних напрямках, виникла різниця фаз, яка дорівнює 2π.

Довжина хвилі λ пов'язана зі швидкістю хвилі υ та частотою ν співвідношенням (16.3), тоді з рівняння (16.7а) отримуємо:

$$\nu = \frac{n}{2l}\upsilon, \quad \text{де } n = 1, 2, 3, \ldots \ , \tag{16.8}$$

або

$$\nu = n\nu_0, \quad \text{де } \nu_0 = \frac{\upsilon}{2l} \ . \tag{16.9}$$

Це означає, що струна може коливатись не лише з однією частотою, а мати цілий спектр частот (див. рис. 16.2). Ці частоти є частотами власних коливань струни. Найменша частота (*n=1*) називається ***основною частотою***, або ***основним тоном***. Вищі частоти з $n > 1$ називаються ***обертонами***.

Швидкість поширення поперечних хвиль у струні

Швидкість поширення хвилі пов'язана з пружними властивостями середовища. Розглянемо залежність поперечного по відношенню до напрямку поширення струни зміщення ξ елемента струни від положення, що задається координатою *x* (див. рис.16.3). Напишемо рівняння руху цього елемента з довжиною *dl* і масою *dm*, до якого прикладені сили натягу $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ з боку сусідніх елементів струни:

$$dm\frac{\partial^2\vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \, . \tag{16.10}$$

Спроектуємо це рівняння на напрям $\vec{\xi}$ (рис. 16.3):

$$dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F_{1\xi} + F_{2\xi} \ . \tag{16.11}$$

При малих коливаннях (відхиленнях) струни модуль сили натягу можна вважати сталим на всій довжині струни, а оскільки сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ взаємно направлені протилежно, то сума її проекцій на напрям зміщення визначатиметься різницею значень похідних $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ у точках *x*+*dx* та *x*:

$$\begin{aligned} F_{1\xi} + F_{2\xi} &= F\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x+dx} - F\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x} = F\left(\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x}\right) = \\ &= F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx = F\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx \ . \end{aligned} \tag{16.12}$$

Після підстановки (16.12) до (16.11) та заміни *dm* на $\rho_l dx$, де ρ_l – лінійна густина струни (маса одиниці довжини струни), отримаємо рівняння

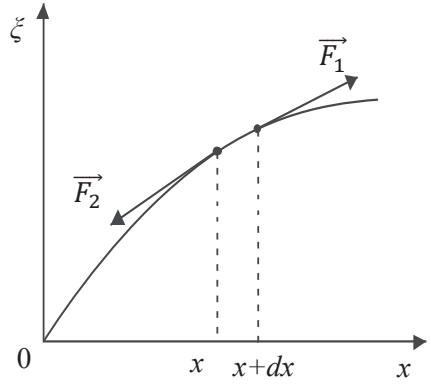


Рис. 16.3. Сили, що діють на елемент струни

$$\rho_l dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx \ , \tag{16.13}$$

яке приводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_l}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \, . \tag{16.14}$$

Порівнюючи рівняння (16.14) з загальним виглядом хвильового рівняння (16.1), отримаємо вираз для швидкості хвилі поперечних коливань струни

$$\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}\ , \qquad (16.15)$$

де F – сила натягу струни, ρ_l – її лінійна густина. Отже, для частот власних коливань струни отримаємо

$$\nu_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho_l}}, \quad \text{де } n = 1,2,3,\ldots\ . \qquad (16.16)$$

Вимірювання

1. Ознайомтеся зі схемою, за якою зібрана установка (рис. 16.1).
2. Підключіть установку до мережі 220 В. Натисніть кнопку «СЕТЬ» пристрою живлення лампи. Після цього повинна загорітися лампа підсвічування струни. Натисніть кнопку «СЕТЬ» вимірювального пристрою. Після цього повинно засвітитися табло вимірювального пристрою і значення поточної частоти.
3. Дайте пристрою прогрітися 3 – 5 хвилин.
4. Встановіть натяг струни 0,4 Н. Ручку «УРОВЕНЬ» встановіть в середнє положення.
5. Змінюючи за допомогою ручок «ЧАСТОТА ГРУБО» та «ЧАСТОТА ТОЧНО» частоти в діапазоні 20 – 45 Гц, отримайте основне власне коливання струни ($n=1$).
6. Поступово підвищуючи частоту генератора отримайте коливання струни на вищих частотах. Кількість отриманих власних частот коливань при певному значенні сили натягу повинна бути не менше чотирьох. Виміри повторіть не менше 5 разів для кожної частоти. Отримані частоти запишіть до таблиці 16.1.
7. Для основного власного коливання ($n=1$) виміряйте залежність ν_1 від сили натягу струни F. Силу натягу змінюйте від 0,1 Н до 0,5 Н. Виміри повторіть не менше 5 разів для кожного значення F. Отримані результати запишіть до таблиці 16.2.
8. По закінченні роботи вимкніть живлення приладу вимикачем «СЕТЬ» на задній панелі вимірювального приладу.

Примітка: не встановлювати натяг струни більше ніж 0,6 Н!

Табл.16.1

n - номер обертону	ν_n, Гц					$<\nu_n>$, Гц	$\Delta\nu_n$, Гц	δ, %	ν_n^{calc}, Гц,	ε, %
	1	2	3	4	5					
1										
2										
…										
5										

Табл.16.2

F, Н	ν_1, Гц					ν_1^2, Гц					$<\nu_1^2>$, Гц	$\Delta(\nu_1^2)$, Гц	δ, %
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5			
0,1													
0,2													
…													
0,5													

Експериментальні завдання

1. Перевірте лінійність експериментальної залежності власних частот коливань струни від порядкового номеру тона $\nu_n = f(n)$. Для цього побудуйте графік відповідної залежності.
2. Розрахуйте абсолютну та відносну експериментальні похибки визначення власних частот коливань струни. Результати запишіть до таблиці 16.1. Значення абсолютної похибки $\Delta\nu_n$ позначте на графіку у вигляді «вусів».
3. За методом найменших квадратів апроксимуйте експериментальну залежність $\nu_n = f(n)$ лінійною функцією $\nu(n) = an + b$.

4. Розрахуйте частоти ν_n^{calc} власних коливань струни за формулою (16.16). Отримані значення запишіть до таблиці 16.1.
5. Отримані теоретичні значення частот порівняйте з експериментальними частотами. Для цього розрахуйте за формулою $\varepsilon = \frac{|\nu_n - \nu_n^{calc}|}{\nu_n^{calc}} \cdot 100\%$ відносне відхилення експериментально визначених частот від розрахованих.
6. Перевірте лінійність експериментальної залежності квадрата частоти основного тону від сили натягу струни $\nu_1^2 = f(F)$. Для цього побудуйте графік відповідної залежності.
7. Розрахуйте абсолютну та відносну експериментальні похибки визначення квадратів власних частот коливань струни. Результати запишіть до таблиці 16.2. Значення абсолютної похибки $\Delta(\nu_1^2)$ позначте на графіку у вигляді «вусів».
8. За методом найменших квадратів апроксимуйте експериментальну залежність лінійною функцією $\nu_1^2(F) = aF + b$. Зі значення параметра апроксимації $a = \frac{1}{4l^2\rho_l}$ розрахуйте значення лінійної густини струни. Порівняйте отримане значення з табличним значенням і зробіть висновок про матеріал з якого виготовлена струна.

Теоретичні завдання

1. Запишіть загальний вигляд хвильового рівняння та його розв'язок, що описує плоскі хвилі.
2. Дайте означення поздовжніх та поперечних хвиль. Основні характеристики хвилі: частота, хвильовий вектор, довжина хвилі, фаза.
3. Який зв'язок швидкості поширення хвилі з пружними характеристиками середовища? Отримайте формулу для швидкості поперечних хвиль у струні (16.15).
4. Що таке стоячі хвилі? Які умови утворення стоячих хвиль в даному досліді?

5. Намалюйте профілі стоячих хвиль у струні, закріпленій на кінцях. Отримайте формулу для частот власних коливань такої струни.
6. Що таке основний тон коливання струни та обертони?
7. Намалюйте профілі стоячих хвиль у струні з вільними кінцями, закріпленій у центрі. Отримайте формулу для частот власних коливань такої струни.
8. Поясніть, чи буде передаватися енергія коливань по струні, в якій встановилась стояча хвиля? Відповідь обґрунтувати.

Рекомендована література

1. О. В. Слободянюк, «Механіка»: електронне видання // Київ, 2014.
2. И. В. Савельев, «Курс общей физики, том1. Механика. Колебания и волны. Молекулярная физика» // Москва, Наука, 1970.
3. «Физический практикум», под редакцией В. И. Ивероновой // Москва, Физматгиз, 1962.
4. Д. В. Сивухин, «Общий курс физики. Т. 1. Механика» // Москва, Наука, 1989.
5. А. Н. Матвеев, «Механика и теория относительности» // Москва, Высшая школа, 1986.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЄЩЕНКО Олег Анатолійович
ПРОКОПЕЦЬ Вадим Миколайович
СЛОБОДЯНЮК Олександр Валентинович
КОНДРАТЕНКО Сергій Вікторович
КУДРЯ Владислав Юрійович
БАШМАКОВА Наталія Володимирівна
ЯБЛОЧКОВА Катерина Сергіївна

МЕХАНІКА. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Друкується за авторською редакцією

Комп'ютерна верстка, коректура
та художнє оформлення обкладинки авторів

Підписано до друку 27.01.2016 р.
Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 15,81.
Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад 220 прим. Зам. № 2-1

Видавець і виготовлювач ТОВ «Четверта хвиля»
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 340 від 20.02.2001
03039, Київ, проспект Лобановського, 119, оф. 213, тел.: (044) 221-13-82
e-mail: 4w@4w.com.ua